МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

СОЗОПОЛ, 30 МАЙ – 1 ЮНИ 2014 Г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ

проф. дпн Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ – София — председател

проф. дмн Гено Петков Николов, СУ „Св. Климент Охридски“
проф. д-р Владимир Тодоров Тодоров, УАСГ – София
проф. д-р Русанка Георгиева Петрова, ШУ „Еп. Константин Преславски“
доц. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София
доц. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ – Варна
гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“
гл. ас. Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“
гл. ас. Паскал Николаев Пиперков, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“

ЖУРИ

доц. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София – председател

проф. дмн Гено Петков Николов, СУ „Св. Климент Охридски“
проф. дмн Людмил Иванов Каранджулов, ТУ – София
проф. дпн Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ - София
проф. д-р Владимир Тодоров Тодоров, УАСГ - София
проф. д-р Русанка Георгиева Петрова, ШУ „Еп. Константин Преславски“
доц. д-р Веселин Ненков Ненков, ТУ - Габрово
доц. д-р Владимир Димитров Бабев, СУ „Св. Климент Охридски“
доц. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ - Варна
гл. ас. д-р Илияна Петров Раева, РУ „Ангел Кънчев“
гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“
гл. ас. Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“
гл. ас. Паскал Николаев Пиперков, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“

Група А

Задача 1. Дадена е диагоналната матрица

$$\mathbf{M} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, ..., a_m)$$

с детерминанта различна от 0.

а) Ако $m = 2$, да се намерят квадратни матрици $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ такива, че $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} = 2$.

б) Ако $m = 3$, да се намерят квадратни матрици $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ такива, че $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} = a_3$.

в) Да се докаже, че за всяко естествено число m съществуват квадратни матрици $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ такива, че $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ и

$$\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} = \begin{cases} 2, & \text{ако } m \text{ е четно,} \\ a_m, & \text{ако } m \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Решение: а) Например

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

б) Например

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & p \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & q \end{array}\right),$$

където $a_3 = p + q$.

в) При m четно дадената матрица представяме по следния начин:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & a_2 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots a_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|ccc} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \underline{-1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & \underline{0} & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \overline{\phantom{a_{m-1}}} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |a_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$
+\begin{pmatrix}
0 & -1| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\underline{1} & \underline{a_2}| & \underline{0} & \underline{0} & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0| & 0 & -1| & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0| & \underline{1} & \underline{a_4}| & ... & 0 & 0 \\
 & & & & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |\overline{0} & \overline{-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |1 & a_m
\end{pmatrix}.
$$

При m нечетно и ако $a_m = p + q$ имаме

$$
\begin{pmatrix}
a_1 & 0 & \dots 0 \\
0 & a_2 & \dots 0 \\
\dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots a_m
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_1 & 1| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\underline{-1} & \underline{0}| & \underline{0} & \underline{0} & ... & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0| & a_3 & 1| & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0| & \underline{-1} & \underline{0}| & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \ddots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |\overline{a_{m-2}} & \overline{1}| & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |\underline{-1} & \underline{0}| & \underline{0} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & |p
\end{pmatrix}
$$

$$
+\begin{pmatrix}
0 & -1| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\underline{1} & \underline{a_2}| & \underline{0} & \underline{0} & ... & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0| & 0 & -1| & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0| & \underline{1} & \underline{a_4}| & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \ddots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |\overline{0} & \overline{-1}| & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & |\underline{1} & \underline{a_{m-1}}| & \underline{0} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & |q
\end{pmatrix}.
$$

Задача 2. Даден е числовият ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)\Big(\frac{2013}{2014}\Big)^n .$$

а) Да се докаже, че редът е сходящ.

б) Да се докаже, че сумата на реда S е цяло число и 2014 дели S.

Решение: Нека $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)x^n$. Редът е сходящ и $f(x)$ е добре дефинирана при $|x| < 1$.

а) Директно следва от горните разсъждения.

б) За $|x| < 1$ имаме $(1-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. След двукратно диференциране получаваме

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \,,$$

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot x^n \,.$$

Оттук

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} \,.$$

Следователно

$$f(\frac{2013}{2014}) = 2014.(2.2014^2 - 3.2014 + 2)\,,$$

откъдето непосредствено следва твърдението.

Задача 3. За $p \geq 0$, нека $f_p(x) = 2014\,x - p\,\sin x$. Да се намерят тези стойности на p, за които от $f_p(f_p(x)) = x$ следва $f_p(x) = x$.

Решение: Отговор: $0 \leq p \leq 2015$.

Да отбележим, че $f_p(x)$ и $f_p(f_p(x))$ са нечетни функции.

Случай I: $0 \leq p \leq 2013$. Имаме $f_p(x) > x$ за всяко $x > 0$ (следва от известното $|\sin x| < |x|$ за $x \neq 0$), откъдето $f_p(f_p(x)) > f_p(x) > x$, т.е. от $f_p(f_p(x)) = x$ следва $x = 0$.

Случай II: $2013 < p \leq 2015$. Имаме $f_p(x) > -x$ за всяко $x > 0$ (следва от известното $|\sin x| < |x|$ за $x \neq 0$). От друга страна, уравнението $f_p(x) = x$ има единствено положително решение, да кажем x_0 . Наистина, то е еквивалентно на $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{2013}{p}$. Функцията $\dfrac{\sin x}{x}$ строго намалява в $\left[0\,, \dfrac{\pi}{2}\right]$ от 1 to $\dfrac{2}{\pi}$ (защото $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x\,\cos x - \sin x}{x^2} < 0$) и строго намалява в $\left[\dfrac{\pi}{2}\,, \pi\right]$ от $\dfrac{2}{\pi}$ до 0 (защото е произведение на две положителни и строго намаляващи функции $\sin x$ и $\dfrac{1}{x}$). От $\dfrac{2013}{p} < 1$, следва, че уравнението $f_p(x) = x$ има единствено решение в $(0,\, \pi)$. Решения $x > 2\pi$ уравнението няма, понеже $\dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{2\pi} < \dfrac{2013}{p}$ (забележка: за големи p уравнението $f_p(x) = x$ може да има повече от едно положително решение).

От $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_p(x) - x) = +\infty$ заключаваме, че $f_p(x) > x$ за $x > x_0$. Имаме още $f_p(0) = 0$ и $(f_p(x) - x)' = 2013 - p\cos x < 0$ за $0 \le x < \arccos\dfrac{2013}{p}$. Следователно, $f_p(x) < x$ за $0 < x < x_0$.

Нека $u > 0$. Ако $u > x_0$, то $f_p(u) > u > x_0$ и $f_p(f_p(u)) > f_p(u) > u$. Ако $u < x_0$, то $-u < f_p(u) < u$, т.е $|f_p(u)| < u$. В случая $0 \le f_p(u)$ имаме $f_p(f_p(u)) \le f_p(u) < u$, а в случая $f_p(u) < 0$ имаме $-f_p(f_p(u)) = f_p(-f_p(u)) > -(-f_p(u)) = f_p(u) > -u$, т.е. отново $f_p(f_p(u)) < u$. Следователно, $f_p(f_p(u)) = u$ за $u > 0$ ни дава $u = x_0$.

Случай III: $2015 < p$. Тогава уравнението $f_p(x) = -x$ има положително решение y_0. Имаме $f_p(y_0) = -y_0 \neq y_0$ и $f_p(f_p(y_0)) = f_p(-y_0) = -f_p(y_0) = -(-y_0) = y_0$.

Група Б

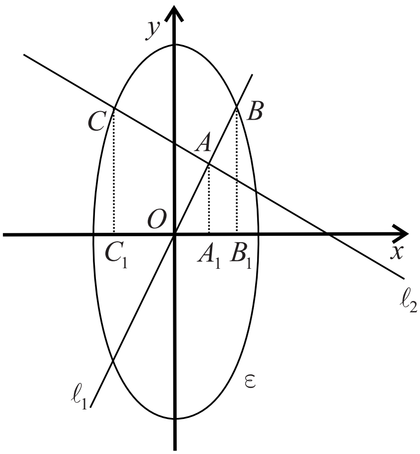
Задача 1. Дадени са правите $\ell_1 : 2x-y=0$, $\ell_2 : 2x+3y-4=0$ и елипсата $\mathcal{E} : 4x^2+y^2=8$.

а) Да се намерят координатите на точките $A = \ell_1 \cap \ell_2$, $B = \ell_1 \cap \mathcal{E}$ и $C = \ell_2 \cap \mathcal{E}$, където B е точка от първи квадрант и C е точка от втори квадрант.

б) Да се намери лицето на изпъкналата фигура, оградена от отсечките AB, AC и дъгата $\widehat{BC}$.

Решение: Решаваме системата $\left|\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 2x+3y-4=0 \end{array}\right.$, откъдето $A\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. От системата $\left|\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 4x^2+y^2=8 \end{array}\right.$, при дадените ограничения, намираме $B\,(1,2)$. Аналогично от $\left|\begin{array}{l} 2x+3y-4=0 \\ 4x^2+y^2=8 \end{array}\right.$ получаваме $C\,(-1,2)$.

б) Означаваме съответно с A_1, B_1, C_1 проекциите на точките A, B и C върху абсцисната ос (фиг. 1).



Фигура 1.

Търсеното лице ще намерим като разлика между лицето на фигурата C_1B_1BC и лицата на трапеците C_1A_1AC и A_1B_1BA.

$$S_{C_1A_1AC} = \frac{9}{4}\,, \quad S_{A_1B_1BA} = \frac{3}{4}\,,$$

$$S_{C_1B_1BC} = \int_{-1}^{1} \sqrt{8-4x^2}dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}dx = 2+\pi\,.$$

Тогава търсеното лице е равно на $2+\pi-\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{4}=\pi-1$.

Задача 2. Нека

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Да се пресметне $\det \mathbf{A}_3$.

б) Да се намери $\det \mathbf{A}_n$.

в) Да се намери $\mathbf{A}_n^{-1}$.

Решение: а) Пресмятаме

$$|\mathbf{A_3}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\,.$$

б) В подусловие а) сме намерили $|\mathbf{A_3}| = 1$. С индукция по n ще докажем, че $|\mathbf{A_n}| = 1$ за всяко $n \geq 2$. Чрез развиване на $|\mathbf{A_{n+1}}|$ по последния ред получаваме рекурентната връзка

$$|\mathbf{A_{n+1}}| = 2|\mathbf{A_n}| - |\mathbf{A_{n-1}}|, \quad n \geq 3\,.$$

Нека за някое $n \geq 3$ сме доказали, че $|\mathbf{A_{n-1}}| = |\mathbf{A_n}| = 1$, тогава от рекурентната връзка намираме $|\mathbf{A_{n+1}}| = 2|\mathbf{A_n}| - |\mathbf{A_{n-1}}| = 2 - 1 = 1$, с което индукционната стъпка е направена, и доказателството завършено.

в) Непосредствено се проверява, че $\mathbf{A_n} = \mathbf{B_n^\top B_n}$, където

$$\mathbf{B_n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{B_n^\top}$ е транспонираната матрица на $\mathbf{B_n}$ (оттук също следва, че $|\mathbf{A_n}| = 1$). Тогава $\mathbf{A_n}^{-1} = \mathbf{B_n}^{-1}\big(\mathbf{B_n}^{-1}\big)^\top = \mathbf{C_n}\mathbf{C_n}^\top$. Лесно се съобразява (например чрез прилагане на метода на Гаус-Жордан), че

$$\mathbf{C_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Елементите $d_{i,j}$ на матрицата $\mathbf{D_n} = \mathbf{A_n}^{-1}$ се получават като скаларно произведение на векторите $\mathbf{c_i}$ и $\mathbf{c_j}$, където

$$\mathbf{c_k} = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)$$

и последователността от единици започва от k-та позиция. Следователно $d_{i,j}$ е равно на броя на събираемите-единици в това скаларно произведение, т. е.

$$d_{i,j} = \min\{n+1-i, n+1-j\} = n+1-\max\{i,j\}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n\,.$$

Задача 3. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{x\,dx}{(3\sin x + 4\cos x)^2}\,.$$

Решение: Преобразуваме

$$\int \frac{x\,dx}{(3\sin x + 4\cos x)^2} = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x + 4)^2}$$

$$= \int \frac{x\,d\operatorname{tg} x}{(3\operatorname{tg} x + 4)^2} = -\frac{1}{3}\int x\,d\frac{1}{3\operatorname{tg} x + 4}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3\operatorname{tg} x + 4} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3\operatorname{tg} x + 4}\,.$$

В $J = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{dx}{3\operatorname{tg} x + 4}$ полагаме $\operatorname{tg} x = t$ и получаваме

$$J = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(1+t^2)(3t+4)}\,.$$

От разлагането $\dfrac{1}{(1+t^2)(3t+4)} = \dfrac{1}{25}\left(\dfrac{-3t+4}{1+t^2} + \dfrac{9}{3t+4}\right)$ намираме

$$J = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}\ln(1+t^2) + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{25}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{25}\ln|3t+4| + C$$

$$= \frac{4x}{75} + \frac{\ln|3\sin x + 4\cos x|}{25} + C\,.$$

Следователно

$$\int\frac{x\,dx}{(3\sin x + 4\cos x)^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3\operatorname{tg} x + 4} + \frac{4x}{75} + \frac{\ln|3\sin x + 4\cos x|}{25} + C.$$

Група B

Задача 1. Нека $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ са квадратни матрици от ред n, и е изпълнено $\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{0}$ и $\mathbf{B}(\mathbf{B}-\mathbf{E})=\mathbf{0}$, където $\mathbf{E}$ и $\mathbf{0}$ са съответно единичната и нулевата матрици от ред n. Да се реши матричното уравнение

$$2\mathbf{X}-\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}=\mathbf{C}\,.$$

Решение: Умножаваме двете страни на даденото уравнение отляво с $\mathbf{A}$ и отдясно с $\mathbf{B}$, и получаваме

$$2\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}-\mathbf{A}^2\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}^2=\mathbf{A}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}\,.$$

Тъй като по условие $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$, последното уравнение е еквивалентно на уравнението

$$2\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}-\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}=\mathbf{A}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}\,,$$

или $\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}=\mathbf{A}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}$. Замествайки в даденото уравнение, получаваме $2\mathbf{X}-\mathbf{A}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}=\mathbf{C}$, откъдето намираме

$$\mathbf{C}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}+\mathbf{C})\,.$$

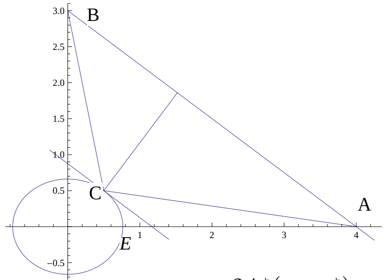
Задача 2. В равнината спрямо декартова координатна система са дадени точките $A(4,0)$ и $B(0,3)$ и елипсата $\mathcal{E}:\ 12x^2+16y^2=7\,.$

а) Да се намерят координатите на точката $C\in\mathcal{E}$, за която лицето на ΔABC е най-малкото възможно.

б) Да се пресметне $S_{\Delta ABC}$.

Решение: Точката $C\in\mathcal{E}$ трябва да е възможно най-близката точка от елипсата до правата AB, и очевидно трябва да лежи в първи квадрант. Правата AB има нормално уравнение

$$f(x,y):=\frac{3x}{5}+\frac{4y}{5}-\frac{12}{5}=0\,.$$



$C(\xi,\eta)\in\mathcal{E}$ е търсената точка, ако допирателната към $\mathcal{E}$ през нея е успоредна на AB, т.е. има нормален вектор $\overrightarrow{n}(3,4)$. Уравнението на тази допирателна е

$$24\xi(x-\xi)+32\eta(y-\eta)=0,$$

следователно трябва да е изпълнено $32\eta : 24\xi = 4:3$, или $\xi=\eta$. От условието $C\in\mathcal{E}$ получаваме $12\xi^2+16\xi^2=7$, т.е. $\xi^2=1/4$, и понеже C е в първи квадрант, намираме $\xi=\eta=\frac{1}{2}$, т.е. търсената точка е $C(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Разстоянието от C до AB (дължината h на височината на ΔABC през C) е равно на $|f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})|=\frac{17}{10}$, а $AB=5$, следователно

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\,AB\cdot h=\frac{17}{4}\,.$$

Задача 3. Дадена е функцията

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Нека $x_0=1$, а членовете на редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ се получават рекурсивно по следния начин: ако сме намерили x_n и ℓ_n е допирателната към графиката на функцията $y=f(x)$ в точката $(x_n,f(x_n))$, тогава пресечната точка на ℓ_n с абсцисната ос има координати $(x_{n+1},0)$.

а) Да се намери x_1.

б) Да се изрази x_{n+1} чрез x_n.

в) Да се докаже, че за всяко n е изпълнено

$$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}<3\,.$$

Решение: Производната на $f(x)$ е $f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, а допирателната ℓ към $y=f(x)$ в точка с координати $(\xi,f(\xi))$ има уравнение

$$\ell:\; y-\frac{1}{1+\xi^2}=-\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}\,(x-\xi)\,.$$

При $\xi = x_0 = 1$ уравнението на допирателната ℓ_0 е $y - 1/2 = -\frac{1}{2}(x-1)$, и тя пресича абсцисната ос при $x = x_1 = 2$.

Изобщо, уравнението на допирателната ℓ_n към $y = f(x)$ в точката $(x_n, f(x_n))$ е

$$\ell_n : \quad y - \frac{1}{1+x_n^2} = -\frac{2x_n}{(1+x_n^2)^2}\,(x - x_n)\,,$$

и $(x_{n+1}, 0)$ е решение на това уравнение. От тук извеждаме търсената връзка:

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}\,x_n + \frac{1}{2x_n}\,.$$

Вижда се, че членовете на редицата са положителни числа, и $x_{n+1} > \frac{3}{2}\,x_n$, следователно

$$\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{2}{3}\,\frac{1}{x_n} \quad \text{за всяко} \quad n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{за всяко} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

От тук

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3\,.$$

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ

проф. д-р Марин Христов, ректор на ТУ – София – председател

доц. д-р Иван Кралов, зам. ректор НПД, ТУ — София
проф. д-р Никола Калоянов, ЕМФ, ТУ – София
доц. д-р Георги Венков, декан ФПМИ ТУ – София
Панайот Рейзи, кмет на Община Созопол
Димитрина Щерионова, директор на СОУ „Св. св. Кирил и Методий“
Румяна Йорданова – секретар