

Получена: 03.11.2017 г.

Приета: 17.11.2017 г.

## ДВИЖЕНИЕ НА ЕЛИПСОИД ВЪВ ФЛУИДНА СРЕДА

А. Иванов<sup>1</sup>

*Ключови думи:* движение, елипсоид, флуид, подедни и съпротивителни сили

### РЕЗЮМЕ

В статията се изследва общо движение на хомогенно твърдо тяло във флуидна среда. Тялото представлява елипсоид с три взаимно перпендикулярни равнини на геометрична и материална симетрия. Сеченията на тези равнини с елипсоида представляват три различни по размер елипси. Тялото се приема с шест степени на свобода. Ротационната компонента от движението му се отчита с Карданови ъгли. Флуидът се приема за неподвижен и се дефинира със своята плътност и неизменяеми скаларни полета на налягането и температурата. Отчитат се всички видове сили и моменти, с които флуидната среда въздейства на тялото. Съставена е програма в средата на MatLab-Simulink, с която са определени 28 броя функции на времето и 3 проекции на траекторията на масовия център в неподвижните координатни равнини.

### 1. Въведение

Взаимодействието на различни видове тела с флуидна среда е един основен, сравнително съвременен и много актуален въпрос в Механиката на флуидите, [1]. Точното изследване на това сложно взаимодействие, което все още не е напълно изучено, се основава на Теорията на граничния слой, основоположници на която се явяват руският учен Жуковски (*Н. Жуковский, 1847 – 1921*) и немският физик Прандтл (*L. Prandtl, 1875 – 1953*).

---

<sup>1</sup>Анастас Иванов, доц. д-р инж., кат. „Механика”, ВТУ „Тодор Каблешков”, 1574 София, ул. „Гео Милев”158, e-mail: aii2010@abv.bg

Впоследствие се обособява нов клон в Механиката на флуидите, наречен Аеродинамика, която изучава обтичането на твърди тела от флуидни течения при скорости, значително по-малки от скоростта на звука, вж. [2, 3].

Изследванията в тази област се обособяват в три клона.

При първото направление се приема, че тялото е неподвижно, а флуидният поток го обтича с определена скорост в дадена посока. Тук е разработена цялата Теория на граничния слой, вж. [4, 5]. На тази предпоставка се изгражда и по-голяма част от експерименталната Механика на флуидите, вж. [6, 7].

Второто направление обхваща случаите, при които флуидната среда е неподвижна, а тялото се движи в нея с определена скорост, вж. [8 ÷ 10].

Третото направление обединява предходните две. Тук флуидният поток обтича с определена скорост движещото се в нея твърдо тяло, вж. [11].

Пространственото движение на тела в неподвижна или движеща се флуидна среда се разглежда в трудовете на много автори, вж. [9 ÷ 12]. В повечето случаи телата имат конкретна форма – сферична (например това са различни видове спортни топки), овална (снаряди, бавно движещи се летателни апарати) и други. Тук са насочени усилията на много учени, обслужващи предимно авиацията и военната индустрия.

На автора на тази статия не са известни публикации или научни разработки, в които са изпълнени *едновременно* следните изисквания:

- Изследването да изучава пространственото движение на симетричен елипсоид с три различни полуоси, третиран като свободно идеално твърдо тяло (ИТТ) с шест степени на свобода, във флуидна среда.
- Кинематиката и динамиката да са разработени с прилагането на Карданови ъгли (*Girolamo Cardano, 1501 – 1576*).
- Изследването да се осъществява в матрична форма с последващо използване на пригодения за тези нужди програмен пакет MatLab.

Всички гореспоменати изисквания са реализирани в настоящето изследване, което го прави актуално към датата на публикуване.

## 2. Кинематика на общото движение на идеално твърд елипсоид

За изследване на общото движение на дадения идеално твърд елипсоид (ИТЕ) е необходимо да се въведат основни понятия в областта на Кинематиката на това движение в матрична форма, вж. [13].

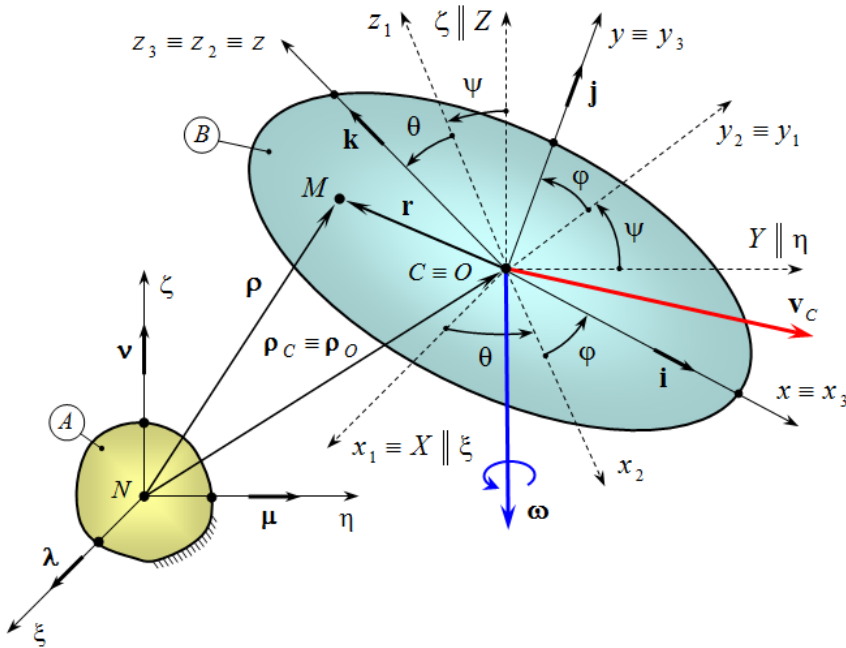
Нека са дадени две идеално твърди тела "А" и "В", вж. фиг. 1. Тяло "А" се приема за абсолютно неподвижно. Другото тяло "В" е изследвания елипсоид. Той се приема за свободен. Елипсоидът извършва общо движение, което се установява по преместването му спрямо тяло "А" и спрямо неподвижна координатна система  $N\xi\eta\zeta$ , която накратко ще означаваме със съкращението НКС. Тя е дефинирана с единичните вектори  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$ . Всички вектори или матрици, които се отчитат спрямо тази координатна система се записват с индекса "А".

Другата координатна система  $Sxyz$  има за начало масовия център  $C$  на елипсоида "В". Тя се нарича подвижна, (ПКС). Дефинира се с единичните вектори  $i$ ,  $j$  и  $k$ . Всички вектори и матрици, които се отчитат спрямо нея, се отчитат с индекса "В".

Третата координатна система  $CXYZ$  е спомагателна. Тя се движи транслационно спрямо неподвижната координатна система  $N\xi\eta\zeta$ .

Сферичната компонента от общото движение на ИТЕ се описва с трите Карданови ъгли  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\phi$ . Те се дефинират като три последователни прости ротации.

Първата ротация на ъгъл  $\psi$  се извършва около оста  $x_1 \equiv X \parallel \xi$  на свързаната с елипсоида координатна система  $Cx_1y_1z_1$ . Втората ротация на ъгъл  $\theta$  се извършва около оста  $y_2 \equiv y_1$  на свързаната с елипсоида втора координатна система  $Cx_2y_2z_2$ . Третата ротация на ъгъл  $\phi$  се извършва около оста  $z_3 \equiv z_2 \equiv z$  на свързаната с елипсоида трета координатна система  $Cx_3y_3z_3 \equiv Cxyz$ .



Фиг. 1. Кинематика на общо движение на идеално твърд елипсоид

Законът на движение на елипсоида се задава с вектора на обобщените координати:

$$\mathbf{q} = \langle \xi_C \quad \eta_C \quad \zeta_C \quad \psi \quad \theta \quad \phi \rangle^T. \quad (1)$$

Дефинират се две матрици на преход, които имат вида:

$$\mathbf{U}_{A,B} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\phi & -c\theta \cdot s\phi & s\theta \\ s\psi \cdot s\theta \cdot c\phi + c\psi \cdot s\phi & -s\psi \cdot s\theta \cdot s\phi + c\psi \cdot c\phi & -s\psi \cdot c\theta \\ -c\psi \cdot s\theta \cdot c\phi + s\psi \cdot s\phi & c\psi \cdot s\theta \cdot s\phi + s\psi \cdot c\phi & c\psi \cdot c\theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{U}_{B,A} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\phi & s\psi \cdot s\theta \cdot c\phi + c\psi \cdot s\phi & -c\psi \cdot s\theta \cdot c\phi + s\psi \cdot s\phi \\ -c\theta \cdot s\phi & -s\psi \cdot s\theta \cdot s\phi + c\psi \cdot c\phi & c\psi \cdot s\theta \cdot s\phi + s\psi \cdot c\phi \\ s\theta & -s\psi \cdot c\theta & c\psi \cdot c\theta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Използвани са следните съкращения:  $c \equiv \cos$  и  $s \equiv \sin$ .

Скоростта на полюса  $C$  спрямо НКС и спрямо ПКС се дефинира така:

$$\mathbf{v}_{C,A} = \dot{\mathbf{p}}_{C,A} = \left\langle \dot{\xi}_C \quad \dot{\eta}_C \quad \dot{\zeta}_C \right\rangle^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_{C,B} = \mathbf{U}_{B,A} \cdot \mathbf{v}_{C,A}. \quad (5)$$

Моментната ъглова скорост на елипсоида и съответната матрица, отнесени спрямо НКС се определят чрез формулите:

$$\boldsymbol{\omega}_A = \begin{bmatrix} \omega_\xi \equiv \omega_X = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cdot \sin \theta \\ \omega_\eta \equiv \omega_Y = \dot{\theta} \cdot \cos \psi - \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi \\ \omega_\zeta \equiv \omega_Z = \dot{\theta} \cdot \sin \psi + \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Същите кинематични характеристики, но отнесени спрямо ПКС, имат вида::

$$\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} \omega_x = \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi + \dot{\theta} \cdot \sin \psi \\ \omega_y = \dot{\theta} \cdot \cos \phi - \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \\ \omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Сега ще дефинираме нов вектор, който ще наречем вектор реална обобщена скорост на изследваното твърдо тяло, в случая идеално твърдия елипсоид. Този вектор обединява скоростта на полюса  $C$  и ъгловата скорост на елипсоида и има размерност  $6 \times 1$ . Отнесен спрямо НКС, той се изписва така:

$$\mathbf{u}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Съществува връзка между вектора реална обобщена скорост  $\mathbf{u}_{C,A}$  на елипсоида и вектора обобщена скорост  $\dot{\mathbf{q}}$  на същото тяло, която се задава с равенството:

$$\mathbf{u}_{C,A} = \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (11)$$

Матрицата  $\mathbf{H}$  от горната формула, при използване на Карданови ъгли, е блокова и има следната структура:

$$\mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{H}}_A \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \theta \\ 0 & \cos \psi & -\cos \theta \cdot \sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \theta \cdot \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Във формула (12) са употребени матриците:  $\mathbf{E} = \mathbf{diag} [ 1 ]_3$  и  $\mathbf{0} = \mathbf{diag} [ 0 ]_3$ .

Използването на вектори и матрици, които имат размерност съответно  $6 \times 1$  и  $6 \times 6$ , води до въвеждане на други две матрици на преход, а именно:

$$\mathbf{W}_{A,B} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{A,B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{A,B} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{W}_{B,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{B,A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{B,A} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

### 3. Динамика на общото движение на идеално твърд елипсоид

В този параграф се разработва в матрична форма най-важната част от динамиката на общото движение на изследвания идеално твърд елипсоид (ИТЕ).

#### 3.1. Динамични характеристики

Елипсоидът се приема за хомогенно тяло, което се дефинира със своята маса  $m$ , респективно със своята диагонална матрицата на масите:

$$\mathbf{M} = \mathbf{diag} [ m ]_3. \quad (16)$$

Осите на неизменно свързаната с елипсоида подвижна координатна система  $Cxyz$  са главни централни. Затова тензорът на масовите инерционни моменти, определен спрямо тези оси, е диагонален и е съставен от константни елементи:

$$\mathbf{J}_{C,B} = \mathbf{diag} ( J_x \quad J_y \quad J_z ). \quad (17)$$

Елипсоидът има три различни полуоси,  $a \neq b \neq c$ , поради което осовите масови инерционни моменти  $J_x$ ,  $J_y$  и  $J_z$  имат различни стойности.

Тензорът на масовите инерционни моменти, определен за транслационно движещата се координатна система  $CXYZ$ , се променя в зависимост от ориентацията на елипсоида в пространството. Ето защо той е функция на времето  $t$  и има вида:

$$\mathbf{J}_{C,A} = \mathbf{J}_{C,A}(t) = \begin{bmatrix} J_X(t) & -J_{XY}(t) & -J_{XZ}(t) \\ -J_{YX}(t) & J_Y(t) & -J_{YZ}(t) \\ -J_{ZX}(t) & -J_{ZY}(t) & J_Z(t) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Предполагаме, че всички сили, които действат на елипсоида, са редуцирани за масовия център  $C$  до главна сила  $\mathbf{F}_A$  и главен момент  $\mathbf{M}_{C,A}$ .

Дефинираме следния вектор:

$$\mathbf{D}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix}, \quad (19)$$

който ще наречем вектор обобщен импулс на елипсоида за избрания полюс  $C$ .

Матрицата:

$$\mathbf{A}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

която дефинира масовите и инерционни свойства на ИТЕ, е отнесена спрямо НКС.

Аналогичната матрица, отнесена спрямо ПКС, има следния вид:

$$\mathbf{A}_{C,B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,B} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Връзката между горните две матрици се осъществява с формулите:

$$\mathbf{A}_{C,A} = \mathbf{W}_{A,B} \cdot \mathbf{A}_{C,B} \cdot \mathbf{W}_{B,A}, \quad (22)$$

$$\mathbf{A}_{C,B} = \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{W}_{A,B}. \quad (23)$$

Формула (19) се записва в съкратен векторно-матричен вид така:

$$\mathbf{D}_{C,A} = \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (24)$$

Въвеждаме вектор-обобщен импулс на ИТЕ за неподвижния полюс  $N$ :

$$\mathbf{D}_{N,A} = \mathbf{D}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{D}_{C,A}, \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{C,A} = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_C & \eta_C \\ \zeta_C & 0 & -\xi_C \\ -\eta_C & \xi_C & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Заместваме формула (24) в равенство (25) и получаваме:

$$\mathbf{D}_{N,A} = \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (28)$$

Дефинираме вектор-реална обобщена сила на ИТЕ за полюса  $C$  :

$$\mathbf{Q}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{C,A} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Дефинираме вектор-реална обобщена сила на ИТЕ за полюса  $N$  :

$$\mathbf{Q}_{N,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{N,A} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Връзката между тези два вектора се осъществява с равенството:

$$\mathbf{Q}_{N,A} = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (31)$$

Това са основните динамични характеристики, необходими за извеждане на диференциалните уравнения на общото движение на свободен ИТЕ. Сега ще покажем два начина за получаване на тези уравнения при приемането, че полюса  $O$  съвпада с масовия център  $C$  на елипсоида.

Първият начин се основава на формулирана нова теорема, назована Теорема за изменение на обобщения импулс на твърдо тяло (ТИОИТТ).

Вторият начин се основава на дефинирани нови по структура уравнения, назовани Кондензирани уравнения на Лагранж (*Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813*).

### 3.2. Теорема за изменение на обобщения импулс

Теоремата гласи: Първата производна спрямо времето на обобщения импулс на дадено твърдо тяло за неподвижен полюс е равна на неговата реална обобщена сила, определена за този полюс.

Математическият запис на изказаната теорема има вида:

$$\frac{d \mathbf{D}_{N,A}}{dt} = \mathbf{Q}_{N,A}. \quad (32)$$

Заместваме формули (25) и (31) в уравнение (32) и получаваме:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (33)$$

Извършваме диференциране по времето в уравнение (33):

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \ddot{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \\
& + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}.
\end{aligned} \quad (34)$$

Провеждаме следните подробни пресмятания:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},
\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \end{bmatrix},
\end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{\tilde{\mathbf{R}}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{\tilde{\mathbf{R}}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_{C,A} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\tilde{\mathbf{R}}}_{C,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_{C,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (37)$$

Като вземем предвид равенствата (35), (36) и (37), уравнение (34) се опростява:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{C,A} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{F}_A \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Сега използваме Теоремата за движение на масовия център:

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} = \mathbf{F}_A. \quad (39)$$

Чрез тази теорема уравнение (38) приема вида:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} = \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (40)$$

По-нататък извършваме диференциране на матрицата  $\mathbf{A}_{C,A}$  и след известни преобразувания достигаме до следната зависимост:

$$\dot{\mathbf{A}}_{C,A} = \boldsymbol{\Phi}_A \cdot \mathbf{B}_{C,A} - \mathbf{B}_{C,A} \cdot \boldsymbol{\Phi}_A, \quad (41)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_A \end{bmatrix}, \quad (42)$$



$$\mathbf{B}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Заместваме формула (41) в уравнение (40) и получаваме:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} = (\mathbf{B}_{C,A} \cdot \Phi_A - \Phi_A \cdot \mathbf{B}_{C,A}) \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (44)$$

Заместваме формула (11) в уравнение (44) и получаваме:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot (\mathbf{H}_A \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{B}_{C,A} \cdot \Phi_A - \Phi_A \cdot \mathbf{B}_{C,A}) \cdot \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (45)$$

Уравнение (45) представлява векторно-матричен запис на нелинейна системата от шест диференциални уравнения, която описва общото движение на свободния идеално твърд елипсоид, при приемането, че полюсът  $O$  съвпада с масовия му център  $C$ . Това уравнение е най-удобно за по-нататъшно изследване.

Всъщност, уравнение (40) представлява втората разновидност на ТИОИТТ, която гласи: Първата производна спрямо времето на обобщения импулс на дадено твърдо тяло за подвижен полюс, който съвпада с масовия център на тялото, е равна на неговата реална обобщена сила, определена за този полюс.

Математическият запис на изказаната теорема има вида:

$$\frac{d \mathbf{D}_{C,A}}{dt} = \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (46)$$

Заместваме формула (24) в горното уравнение и получаваме:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}) = \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (47)$$

Сега, ако извършим диференцирането ще получим отново изведеното вече диференциално уравнение (40).

### 3.3. Кондензирани уравнения на Лагранж

Кинетичната енергия на свободното ИТТ, което извършва общо движение, се определя от квадратичната форма на вектора-реална обобщена скорост и матрицата на масовите и инерционни свойства, съгласно Теоремата на Кьониг (*Johann Samuel König, 1712 – 1757*):

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \langle \mathbf{v}_{C,A} \quad \boldsymbol{\omega}_A \rangle^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Използвайки формули (10) и (20), кинетичната енергия на ИТЕ се записва в съкратен векторно-матричен вид така:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{C,A}^T \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (49)$$

Нека на ИТЕ действат определен брой активни сили  $\mathbf{F}_{k,A}$ , ( $k=1,2,\dots,h$ ), приложени в точки  $D_k$  и дефинирани с абсолютните радиус-вектори  $\mathbf{p}_k$ .

Определя се възможната мощност на тези сили, при възможни безкрайно малки изменения на скоростта на приложните точки  $D_k$ , което се дължи на възможно безкрайно малко общо движение на ИТТ:

$$\begin{aligned}
 \delta P &= \sum_{k=1}^h \mathbf{F}_{k,A}^T \cdot \delta \mathbf{v}_{k,A} = \mathbf{F}_A^T \cdot \delta \mathbf{v}_{C,A} + \left( \mathbf{M}_{C,A} + \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{F}_A \right)^T \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_A = \\
 &= \delta \mathbf{v}_{C,A}^T \cdot \mathbf{F}_A + \delta \boldsymbol{\omega}_A^T \cdot \left( \mathbf{M}_{C,A} + \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{F}_A \right) = \\
 &= \delta \left\langle \mathbf{v}_{C,A}^T \quad \boldsymbol{\omega}_A^T \right\rangle \cdot \left[ \mathbf{M}_{C,A} + \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{F}_A \right] = \\
 &= \delta \left\langle \mathbf{v}_{C,A} \quad \boldsymbol{\omega}_A \right\rangle^T \cdot \left( \left[ \begin{array}{c} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{C,A} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{C,A} \end{array} \right] \right) = \\
 &= \delta \mathbf{u}_{C,A}^T \cdot \left( \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A} \right). \tag{50}
 \end{aligned}$$

Тогава векторът реална обобщена сила на ИТЕ за неподвижния полюс  $N$  ще се определи по формулата:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{N,A} &= \frac{\delta P}{\delta \mathbf{u}_{C,A}} = \frac{\delta \mathbf{u}_{C,A}^T}{\delta \mathbf{u}_{C,A}} \cdot \left( \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A} \right) = \\
 &= \bar{\mathbf{E}} \cdot \left( \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A} \right) = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}, \tag{51}
 \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{diag} [ 1 ]_6. \tag{52}$$

Дефинираме следните диференциални уравнения, които наричаме Кондензирани уравнения на Лагранж, с които се изследва общото движение на свободно ИТЕ:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (E_k + \tilde{E}_C)}{\partial \mathbf{u}_{C,A}} \right] = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}. \tag{53}$$

Величината  $\tilde{E}_C$  се конструира по следния начин:

$$\tilde{E}_C = \mathbf{u}_{C,A}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{C,A}, \tag{54}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{C,A} = \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{D}_{C,A} = \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \tag{55}$$

Заместваме формули (49) и (54) в уравнения (53) и получаваме:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) + \frac{d \tilde{\mathbf{F}}_{C,A}}{dt} = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}, \tag{56}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) + \frac{d}{dt} \left( \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \\ & + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}. \end{aligned} \quad (58)$$

Сега, ако се възползваме от изведените изрази (35) (36) и (37), уравнение (58) се опростява до вида:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{C,A} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{F}_A \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Уравнение (59) съвпада напълно с уравнение (38).

По-нататък за получаване на диференциалното уравнение (45) се следва алгоритъмът, описан от уравнение (39) до уравнение (44).

#### 4. Аеродинамични сили

В този параграф ще разгледаме подробно аеродинамичните сили, с които флуидът въздейства върху движещия се в него симетричен ИТЕ. Получаването на тези сили по аналитичен път е сравнително трудна задача. Тя се изследва предимно в Теорията на граничния слой. С нея са решени точно множество сравнително по-прости задачи. В много от по-сложните случаи, обаче, изследователите достигат до значителни затруднения. Ето защо се е наложил друг начин на изследване. Знаем, че в Механиката на деформируемото твърдо тяло чрез напреженията се достига до интегрални силови характеристики. Това са разрезните усилия. Тук, при обтичане на тялото от флуида по околната му повърхнина, възникват нормални и тангенциални напрежения. Те водят до интегрални силови характеристики, които се наричат аеродинамични сили. Определянето им, обаче, не се извършва по аналитичен път, макар че в някои случаи се достига до такива решения. В повечето случаи те се получават чрез експериментални изследвания в специализирани лаборатории. Използват се действителни или умалени модели. Те се изпитват в аеродинамични канали (тръби). Този подход се използва в настоящата статия.

Да разгледаме елипсоида от фиг. 2, който в даден момент има скорост на масовия център  $\mathbf{v}_{C,A}$  и ъглова скорост  $\boldsymbol{\omega}_A$ , отчетени спрямо НКС.

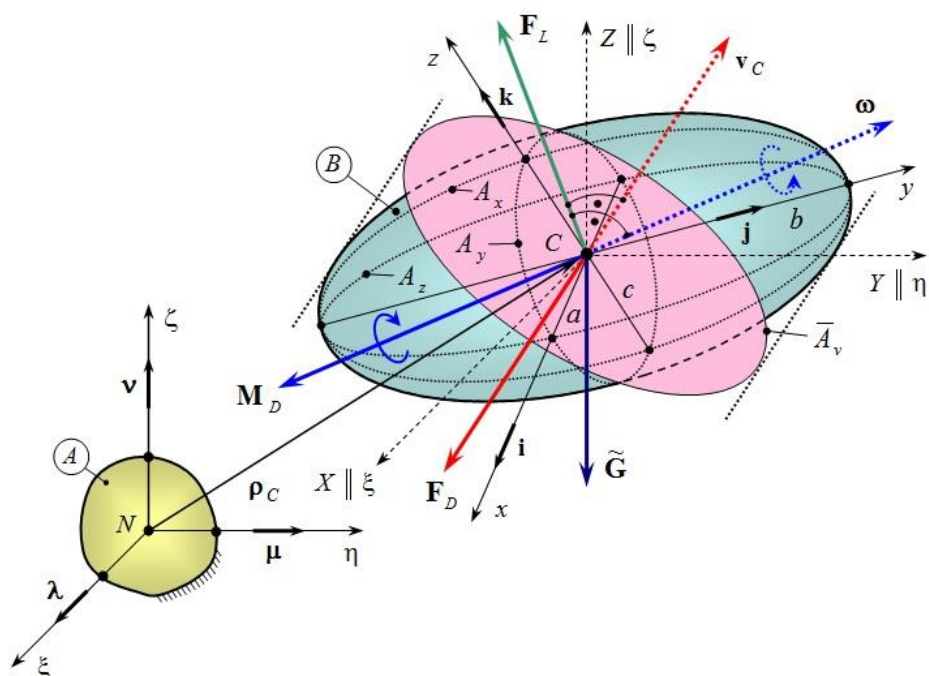
Основните сили, които действат на елипсоида са следните:

- Редуцирана сила на тежестта

Тя включва едновременно теглото на елипсоида и противоположната сила от Закона на Архимед (*Αρχιμήδης*, 287 – 212 г. пр.н.е.). Определя се по формулата:

$$\tilde{\mathbf{G}}_A = \left( m - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \rho_a \right) \cdot g \cdot \langle 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle^T, \quad (60)$$

където  $m$  е масата на елипсоида,  $g$  е земното ускорение,  $a$ ,  $b$  и  $c$  са дължините на трите полуоси на елипсоида,  $\rho_a$  е плътността на флуида, вж. фиг. 2.



Фиг. 2. Динамика на общо движение на идеално твърд елипсоид

- **Съпротивителна сила**

Тя се явява в противоположна посока на скоростта  $\mathbf{v}_{C,A}$  и има вида:

$$\mathbf{F}_{D,A}^{(a)} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot C_D \cdot \bar{A}_v \cdot \frac{\mathbf{v}_{C,A}}{|\mathbf{v}_{C,A}|}, \quad (61)$$

където  $\mathbf{v}_{C,A}$  е векторът скорост на масовия център  $C$  на елипсоида, а  $|\mathbf{v}_{C,A}| \equiv v_C$  е големината на тази скорост.

Константата  $\bar{A}_v$  представлява проектираното лице на елипсоида в равнина, перпендикулярна на вектора  $\mathbf{v}_{C,A}$ . Това лице е с формата на елипса с полуоси  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

Лицето  $\bar{A}_v$ , както и двете полуоси  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , по време на движението на елипсоида се променят и следователно представляват функции на времето  $t$ .

Безразмерният коефициент  $C_D$  е известен в аеродинамиката като коефициент на челно съпротивление. Той зависи от режима на обтичане – ламинарен или турбулентен, количествен и качествен показател на който се явява числото на Рейнолдс (*Osborne Reynolds, 1842 – 1912*):

$$Re = \frac{v_C \cdot L}{\vartheta} = \frac{v_C \cdot L}{\mu} \cdot \rho_a, \quad (62)$$

където  $\vartheta$  и  $\mu$  са съответно кинематичният и динамичният коефициент на вискозитет на флуида, който обгича елипсоида, а  $L$  е характерна дължина.

#### • Подемна сила

Тя се явява при обгичане на тела от флуид. Тази сила се отъждествява със силата на Магнус (*Heinrich Gustav Magnus, 1802 – 1870*). Тя се нарича подемна условно, тъй като нейното направление и посока се определя от векторното произведение на ъгловата скорост  $\boldsymbol{\omega}_A$  и скоростта  $\mathbf{v}_{C,A}$ . Физическата обосновка за възникването на тази сила се дава по няколко начина, вж. [1]. Накратко, поради наличието на сферична компонента от общото движение на дадено твърдо тяло около избран полюс (в случая това е масовия център  $C$  на ИТЕ) се създава циркулация на флуидния поток. Това води до поява на разлика в налягането в нормално (перпендикулярно) направление на равнината, минаваща през векторите  $\boldsymbol{\omega}_A$  и  $\mathbf{v}_{C,A}$ . Експерименталните изследвания показват, че тази сила може с достатъчна точност да се определи по формулата:

$$\mathbf{F}_{L,A}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot C_L \cdot \bar{A}_v \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}_A \cdot \mathbf{v}_{C,A}}{|\boldsymbol{\omega}_A \cdot \mathbf{v}_{C,A}|}. \quad (63)$$

Безразмерният коефициент  $C_L$  зависи също от числото на Рейнолдс, вж. формула (62), като приблизително той е около два пъти по-малък от коефициента  $C_D$ .

#### • Съпротивителен момент

Този момент се явява в противоположна посока на ъгловата скорост  $\boldsymbol{\omega}_A$  на елипсоида. Определя се по формулата:

$$\mathbf{M}_{D,A}^{(a)} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot C_M \cdot \bar{A}_v \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}_A}{|\boldsymbol{\omega}_A|}, \quad (64)$$

където коефициентът  $C_M$  зависи от числото на Рейнолдс, но също и от грапавостта на обтечната повърхност на тялото.

Трите формули, (61), (63) и (64), са прости по структура, но неудобни за работа. Това е така, защото по време на движение на елипсоида, лицето  $\bar{A}_v$  постоянно се променя. За да се използват, трябва да се определи закона на изменение на това лице в зависимост от ориентацията на елипсоида в пространството.

Така достигаме до основната цел в настоящата работа.

Тази цел се формулира по следния начин:

- Да се изведе системата диференциални уравнения, която описва общото движение на свободен симетричен ИТЕ с три различни по дължина полуоси.
- Да се намери методика, с която да се определят аеродинамичните сили, действащи на ИТЕ по време на общото му движение в неподвижна флуидна среда.

- Да се интегрира системата диференциални уравнения числено с подходяща математическа програма.

## 5. Диференциални уравнения

Системата диференциални уравнения (45), която описва общото движение на ИТЕ, е отнесена спрямо НКС. В този вид, обаче, тя не е най-подходящият вариант с оглед на численото ѝ интегриране. Това е така, защото матриците  $\mathbf{A}_{C,A}$  и  $\mathbf{B}_{C,A}$ , които са носители на масовите и инерционни характеристики на елипсоида, са функции на времето  $t$ . За да се освободим от това неудобство, отнасяме системата (45) спрямо ПКС. Получаваме следния преобразуван вид:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{C,B} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot (\mathbf{H}_A \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}) = \\ & = (\mathbf{B}_{C,B} \cdot \Phi_B - \Phi_B \cdot \mathbf{B}_{C,B}) \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A} \end{aligned} \quad (65)$$

Тук матриците  $\mathbf{A}_{C,B}$  и  $\mathbf{B}_{C,B}$  са изградени от елементи с константни стойности, което прави горната система много по-удобна за работа в сравнение със системата (45). Освен това, векторите  $\ddot{\mathbf{u}}_{C,A} = \mathbf{H}_A \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{u}_{C,A} = \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}$  и  $\mathbf{Q}_{C,A}$  са отнесени спрямо НКС, което също е удобно. Като недостатък може да се изтъкне появата на матрицата на преход  $\mathbf{W}_{B,A}$ . Но за числено интегриране с помощта на компютър това не е от значение.

И така, системата диференциални уравнения, която описва общото движение на ИТЕ, е определена. Остава нерешен въпросът за идентифициране на вектора на реалната обобщена сила  $\mathbf{Q}_{C,A}$ .

В параграф 4 дефинирахме основните сили, които действат на елипсоида. Но и там, всички кинематични и силови характеристики отнесохме спрямо неподвижната координатна система  $N\xi\eta\zeta$ . Разяснихме и затруднението, което следва от това.

Сега, тези величини ще трябва да ги отнесем спрямо свързаната неизменно с ИТЕ подвижна координатна система  $Sxyz$ . В резултат на това лицата на проектираните елипси, както и съответстващите аеродинамични коефициенти, ще бъдат константни величини при постоянно число на Рейнолдс.

И така, нека разгледаме отново аеродинамичните сили, които действат на ИТЕ.

### • Съпротивителна сила

Съпротивителната аеродинамична сила отнасяме спрямо ПКС. Представяме я във векторно-матрична форма по следния начин:

$$\begin{bmatrix} F_{D,x}^{(a)} \\ F_{D,y}^{(a)} \\ F_{D,z}^{(a)} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{C_{D,x} \cdot A_x}{|\mathbf{v}_{C,B}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{D,y} \cdot A_y}{|\mathbf{v}_{C,B}|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{D,z} \cdot A_z}{|\mathbf{v}_{C,B}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C,x} \\ v_{C,y} \\ v_{C,z} \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Големината на вектора скорост на полюса  $C$  не зависи от координатната система, спрямо която се отчита. Следователно са в сила равенствата:  $|\mathbf{v}_{C,A}| = |\mathbf{v}_{C,B}| = v_C$ .

Въвеждаме следната матрица:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(D)} = \frac{1}{|\mathbf{v}_{C,A}|} \cdot \begin{bmatrix} -C_{D,x} \cdot A_x & 0 & 0 \\ 0 & -C_{D,y} \cdot A_y & 0 \\ 0 & 0 & -C_{D,z} \cdot A_z \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Изписваме формула (66) в съкратен вид по следния начин:

$$\mathbf{F}_{D,B}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(D)} \cdot \mathbf{v}_{C,B}. \quad (68)$$

Лицата на елипсите  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$  с нормали, съответно осите  $x$ ,  $y$  и  $z$ , имат постоянни значения, а именно:  $A_x = \pi \cdot b \cdot c$ ,  $A_y = \pi \cdot c \cdot a$  и  $A_z = \pi \cdot a \cdot b$ .

Трите коефициента на челно съпротивление  $C_{D,x}$ ,  $C_{D,y}$  и  $C_{D,z}$  при константно число на Рейнолдс също имат константни значения.

- **Подемна сила**

Подемната сила съставяме във векторно-матрична форма по обратен начин, като в началото я изписваме в съкратена форма:

$$\mathbf{F}_{L,B}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)} \cdot \mathbf{v}_{C,B}. \quad (69)$$

Конкретизираме матрицата  $\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)}$  съгласно следваната методика така:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)} = \begin{bmatrix} \frac{C_{L,x} \cdot A_x}{|\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{v}_{C,B}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{L,y} \cdot A_y}{|\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{v}_{C,B}|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{L,z} \cdot A_z}{|\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{v}_{C,B}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Тъй като големината на векторното произведение  $\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{v}_{C,B}$ , отнесено спрямо ПКС и спрямо НКС е една и съща, то за матрицата  $\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)}$  съставяме следната формула:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)} = \frac{1}{|\boldsymbol{\Omega}_A \cdot \mathbf{v}_{C,A}|} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -C_{L,x} \cdot A_x \cdot \omega_z & C_{L,x} \cdot A_x \cdot \omega_y \\ C_{L,y} \cdot A_y \cdot \omega_z & 0 & -C_{L,y} \cdot A_y \cdot \omega_x \\ -C_{L,z} \cdot A_z \cdot \omega_y & C_{L,z} \cdot A_z \cdot \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

И тук, трите коэффициента на подемната сила,  $C_{L,x}$ ,  $C_{L,y}$  и  $C_{L,z}$ , при константно число на Рейнолдс, имат константни значения.

- **Съпротивителен момент**

Първоначално формулата за съпротивителния момент изписваме така:

$$\mathbf{M}_{D,B}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)} \cdot \boldsymbol{\omega}_B. \quad (72)$$

Конкретизираме матрицата  $\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)}$  по следния начин:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)} = \begin{bmatrix} -\frac{C_{M,x} \cdot A_x}{|\boldsymbol{\omega}_B|} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{M,y} \cdot A_y}{|\boldsymbol{\omega}_B|} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_{M,z} \cdot A_z}{|\boldsymbol{\omega}_B|} \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Големината на вектора моментна ъглова скорост, отнесен спрямо ПКС и спрямо НКС, е една и съща. Тогава за матрицата  $\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)}$  се получава по-удобната формула:



$$\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)} = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}_A|} \cdot \begin{bmatrix} -C_{M,x} \cdot A_x & 0 & 0 \\ 0 & -C_{M,y} \cdot A_y & 0 \\ 0 & 0 & -C_{M,z} \cdot A_z \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Трите коэффициента на съпротивителния момент,  $C_{M,x}$ ,  $C_{M,y}$  и  $C_{M,z}$ , при константно число на Рейнолдс имат константни значения.

Обединяваме съпротивителната сила  $\mathbf{F}_D^{(a)}$ , подемната сила  $\mathbf{F}_L^{(a)}$  и съпротивителния момент  $\mathbf{M}_D^{(a)}$  в една реална обобщена аеродинамична сила по следния начин:

$$\mathbf{Q}_{C,B}^{(a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B^{(a)} \\ \mathbf{M}_{C,B}^{(a)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,B} \\ \boldsymbol{\omega}_B \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Във формула (85) сме въвели следните матрици:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1} = \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(D)} + \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)}, \quad (76)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{2,2} \equiv \tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)}. \quad (77)$$

Въвеждаме още една матрица, а именно:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Използвайки горната матрица, реалната обобщена аеродинамична сила, отнесена спрямо ПКС, представяме в следния съкратен векторно-матричен вид:

$$\mathbf{Q}_{C,B}^{(a)} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{u}_{C,B}. \quad (79)$$

Реалната обобщена аеродинамична сила, отнесена спрямо НКС, ще има вида:

$$\mathbf{Q}_{C,A}^{(a)} = \mathbf{W}_{A,B} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (80)$$

Реалната обобщена сила се получава като векторна сума от реалната обобщена аеродинамична сила и редуцираното тегло на елипсоида, а именно:

$$\mathbf{Q}_{C,A} = \mathbf{Q}_{C,A}^{(a)} + \tilde{\mathbf{G}}_A = \mathbf{W}_{A,B} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \tilde{\mathbf{G}}_A. \quad (81)$$

Заместваме формула (11) в горното равенство и получаваме:

$$\mathbf{Q}_{C,A} = \mathbf{W}_{A,B} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{G}}_A. \quad (82)$$

Заместваме формула (82) в диференциалното уравнение (65) и получаваме:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{C,B} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot (\mathbf{H}_A \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}) = \\ & = (\mathbf{B}_{C,B} \cdot \boldsymbol{\Phi}_B - \boldsymbol{\Phi}_B \cdot \mathbf{B}_{C,B} + \tilde{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}. \end{aligned} \quad (83)$$

Системата диференциални уравнения (83) описва общото движение на идеално твърд елипсоид във флуидна среда. Тя е подходяща е за числено интегриране.

## 6. Числено решение

Съставена е програма в средата на MatLab-Simulink, с помощта на която по зададени начални условия се получават 28 функции на времето  $t$ . Програмата е универсална. Тя може да се използва, както за изследване на общото движение на елипсоиди, така и на сфери, в частност на спортни топки за тенис, голф, футбол и др.

Законите, които се определят, са:  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\zeta(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\dot{\xi}(t)$ ,  $\dot{\eta}(t)$ ,  $\dot{\zeta}(t)$ ,  $\dot{\psi}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$ ,  $\ddot{\xi}(t)$ ,  $\ddot{\eta}(t)$ ,  $\ddot{\zeta}(t)$ ,  $\ddot{\psi}(t)$ ,  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\phi}(t)$ ,  $v_C(t)$ ,  $a_C(t)$ ,  $\omega_X(t)$ ,  $\omega_Y(t)$ ,  $\omega_Z(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\varepsilon_X(t)$ ,  $\varepsilon_Y(t)$ ,  $\varepsilon_Z(t)$ ,  $\varepsilon(t)$ .

Програмата получава директно проекциите на траекторията на масовия център  $C$  спрямо трите неподвижни координатни равнини:  $N\eta\zeta$ ,  $N\zeta\xi$  и  $N\xi\eta$ .

Проведен е числен експеримент за хомогенен идеално твърд елипсоид.

Размери на елипсоида:  $a = 0,145$  m,  $b = 0,110$  m,  $c = 0,083$  m.

Маса на елипсоида:  $m = 0,45$  kg. Плътност на флуида:  $\rho_a = 1,205$  kg/m<sup>3</sup>.

Приети аеродинамични коефициенти:

$$C_{D,x} = 0,303, C_{D,y} = 0,399, C_{D,z} = 0,529,$$

$$C_{L,x} = 0,152, C_{L,y} = 0,200, C_{L,z} = 0,265,$$

$$C_{M,x} = 0,02, C_{M,y} = 0,02 \text{ и } C_{M,z} = 0,03.$$

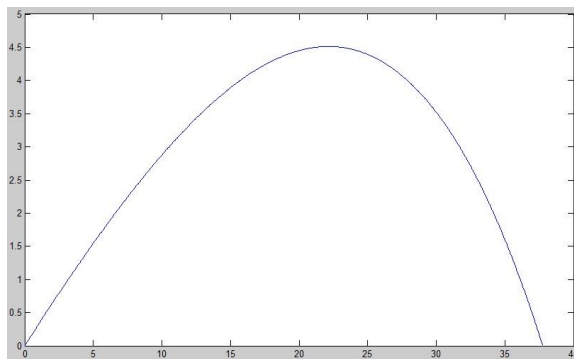
Начални условия:

$$\xi_0 = 1 \text{ m}, \eta_0 = 0, \zeta_0 = 0, \psi_0 = 0, \theta_0 = 0, \phi_0 = 0,$$

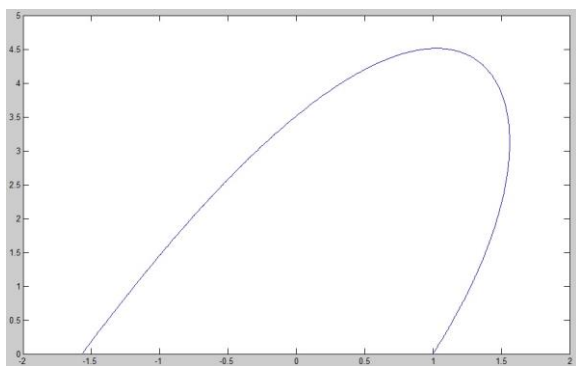
$$\dot{\xi}_0 = 2,8, \dot{\eta}_0 = 28, \dot{\zeta}_0 = 9 \text{ m/s}, \dot{\psi}_0 = 64, \dot{\theta}_0 = -3, \dot{\phi}_0 = 74 \text{ s}^{-1}.$$

Численото решение е проведено с променлива стъпка (Variable-step) по метода „ode 23“ (Vogacki-Shampine) и време на интегриране  $t = 2,1663$  s.

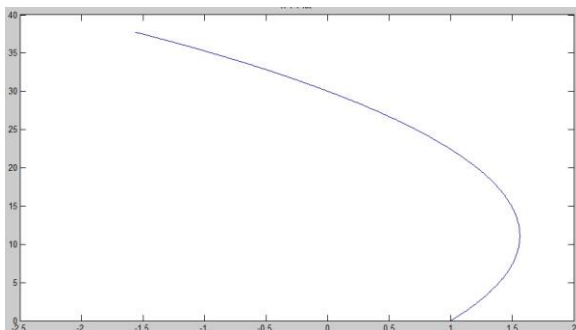
Проекциите на траекторията на масовия център  $C$  в трите координатни равнини на неподвижната координатна система са показани последователно на фиг. 3, 4 и 5.



Фиг. 3. Проекция на траекторията на масовия център  $C$  в равнината  $N\eta\zeta$



**Фиг. 4.** Проекция на траекторията на масовия център  $C$  в равнината  $N\xi\zeta$



**Фиг. 5.** Проекция на траекторията на масовия център  $C$  в равнината  $N\xi\eta$

## 7. Заключение

Основната цел на настоящата статия е изпълнена. За извеждането на системата диференциални уравнения във векторно-матрична форма, която описва общото движение на симетричен идеално твърд елипсоид с три различни полуоси, са използвани дефинирани в предходни публикации на автора Теорема за изменение на обобщения импулс и Кондензирани уравнения на Лагранж. Описани са в матрична форма всички аеродинамични сили и моменти, с които неизменяемата флуидна среда въздейства на елипсоида. Тук се намират основните теоретични приноси в статията.

Съставена е програма в средата на MatLab-Simulink, с помощта на която са проведени числени пресмятания за елипсоиди с различни размери. Тя е универсална, защото в граничен случай с нея се изследват и сфери. Статията предоставя възможност и за разработване на учебни програми с други софтуерни продукти и най-вече MathCAD, вж. [14]. Ето защо тя има и определени научно-приложни и приложни приноси.

## Благодарност

В чест на 75 годишния юбилей на УАСГ изказвам моята най-сърдечна, пряка и задочна, благодарност на всички преподаватели, които в годините от 1977 г. до 1982 г. ме създадоха като инженер, преподавател, педагог и учен!

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов, А.* Основен курс по Механика на флуидите. Авангард Прима, 2016.
2. *Milne-Thomson, L. M.* Theoretical Aerodynamics. Dover Publ. Inc. New Yourk, 1958.
3. *Katz, J., Plotkin, A.* Low-Speed Aerodynamics. Cambridge Un. Press, 2001.
4. *Schlichting, (Deceased) H., Gersten, K.* Boundary-Layer Theory. Springer Verl. Berlin, Heidelberg, 2017.
5. *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газа. ГИТТЛ, Москва, Ленинград, 1950.
6. *Safarik, P.* Experimental Investigation in Fluid Mechanics—its Role, Problems and Tasks, EPJ Web of Conferences 45, 01118 (2013).
7. *Bradshaw, P.* Experimental Fluid Mechanics. eBook ISBN 9781483150987, Pergamon, 1970.
8. *Jalilian, P., Kreun, P. K., Hady, M., Makhmalbaf, M., Liou, W. W.* Computational aerodynamics of baseball, soccer ball and volleyball. Am. J. of Sp. 2(5): 115-121, 2014.
9. *Иванов, А.* Пространствено изследване летежа на тенис топка. // сп. Механика на машините, год. XXII, кн. 2, с. 34 – 37, 2014.
10. *Ivanov, A., Javorova, J.* Three dimensional golf ball flight. J. Tehnomus ISSN-1224-029X, p. 54, Авангард Прима, 2016.
11. *Baek, S., Kim, M.* Flight Trajectory of a Golf Ball for a Realistic Game. Int. J. of Inn., Man. And Tech., vol. 4, № 3, p. 346-350, 2013.
12. *Cooke, A.J.* An overview of tennis ball aerodynamics. Sp. Eng. 3(2), 123-129, 2000.
13. *Иванов, А.* Теор. Механика-Кинематика в матрична форма. Аван. Прима, 2012.
14. *Стоянов, А. Д.* Изследване съставното движение на точка с MathCAD. // Го-дишник на МГУ, Том 58, Св. III, стр. 122–125, София, 2015.

## MOTION OF ELLIPSOID IN FLUID AREA

**A. Ivanov<sup>1</sup>**

**Keywords:** *general motion, ellipsoid, fluid, lifting and resisting forces*

### ABSTRACT

The paper examines the general motion of a homogeneous rigid body in a fluid environment. The body is an ellipsoid with three mutually perpendicular planes of geometric and material symmetry. The cuts of these planes with the ellipsoid represent three different ellipses. The body is accepted with six degrees of freedom. The rotation component of its general motion is counted with Cardan angles. The fluid is assumed to be immovable and it is defined by its density and invariant scalar fields of pressure and temperature. All kinds of forces and moments with which the fluid environment affects the body are accepted. A program in the MatLab-Simulink environment is developed, which identified 28 time functions and 3 projections of the mass center trajectory in the fixed coordinate planes.

---

<sup>1</sup>Anastas Ivanov, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. “Mechanics”, Todor Kableshkov University of Transport, 158 Geo Milev St., Sofia 1574, e-mail: aii2010@abv.bg