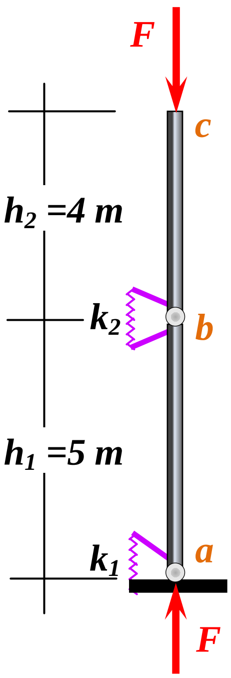
Изследване на устойчивостта на равновесното състояние на системи с краен брой степени на свобода

Следващият пример илюстрира основните разсъждения при изследване на устойчивостта на равновесната форма на системи с краен брой степени на свобода.



Фиг. 1 Равновесно състояние

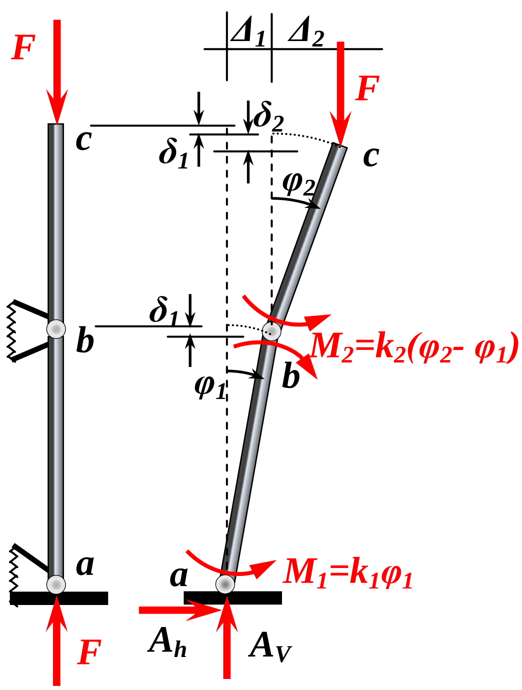
Използва се простичката система, чиито изчислителен модел е показан на фигура 1.

На същата фигура са показани означенията на физическите характеристики на елементите на конструкцията.

Приема се, че деформациите на двата прътa *ab* и *bc* може да се пренебрегнат. Математически това се осъществява като се приеме, че тяхната коравина на огъване е безкрайно голяма. Двата прътa са с идеално прави оси, които лежат на една права. Същата права е директриса на силата ***F***, която е приложена в точка *c,* и на опорната реакция в точка *a*.

Елементите, които са изчертани в лилав цвят, заменят деформируеми елементи на конструкцията. Приети са еквивалентни пружинни константи със следните големини:

$\boldsymbol{k_1}$ = 800 kN/rad   и $\boldsymbol{k_2}$ = 500 kN/rad



Фиг. 2 Възможно второ равновесно състояние

Приема се, че от изследваното изходно равновесно състояние, при запазване на големината на натоварването, конструкцията преминава в друго равновесно състояние – фигура 2. При този преход връзките между отделните дискове и опорните връзки се запазват.

Количествено отклоненията от изходното равновесно състояние се определят с два параметъра – ъглите $\boldsymbol{\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_2}$.

На фигурата са показани и въздействията $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$, с които деформируемите части на конструкцията въздействат върху натиснатите пръти.

А. Изследване по теория от $II^{ри}$ ред

Приема се : $\varphi_1 <<<<<1$ и $\varphi_2 <<<<<1$, поради което $\sin\varphi_1 = \varphi_1$ и $\sin\varphi_2 = \varphi_2$.

(1)
$$\Delta_1 = 5\varphi_1 \qquad \Delta_2 = 4\varphi_2$$
$$\delta_1 = 5\frac{1}{2}\varphi_1^2 \qquad \delta_2 = 4\frac{1}{2}\varphi_2^2$$

Статически метод – за възможното ново равновесно състояние се записват се всички независими условия за равновсие и се търси тяхно ненулево решение.

(2)
$$\sum H = 0 \qquad A_h = 0$$
$$\sum V = 0 \qquad A_V = F$$
$$\sum M_b^{bc} = 0 \qquad F4\varphi_2 - 500(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$
$$\sum M_a = 0 \qquad F(4\varphi_2 + 5\varphi_1) - 800\varphi_1 = 0$$

Двете моментови уравнения се записват в следния вид:

(3)
$$500\varphi_1 \;+\; (4F - 500)\varphi_2 = 0$$
$$(5F - 800)\varphi_1 + 4F\varphi_2 = 0$$

Условието за съществуване на ненулево решение е:

(4)
$$D = \begin{vmatrix} 500 & 4F - 500 \\ 5F - 800 & 4F \end{vmatrix} = -20F^2 + 7700F - 400000 = 0$$

Това квадратно уравнение има два реални и положителни корена:

(5)
$$F_{1cr} = 61,9kN \qquad F_{2cr} = 323,1kN$$

Енергетически метод – Равновесието при възможното ново равновесно състояние се изследва с теоремата на Лагранж – Дирихле. Изразява се пълната потенциална енергия на конструкцията като функция на двата параметъра φ_1 и φ_2 и се търсят такива големини на външния товар и на параметрите φ_1 и φ_2, при които пълната потенциална енергия има екстремум.

(6)
$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = \Pi_0 + W - A$$

Π_0 е пълната потенциална енергия на конструкцията в изходното състояние.

W е потенциалната енергия на деформацията. Тя е равна по големина и обратна по знак на работата на разрезните усилия (в този пример на еквивалентните им M_1 и M_2), извършена от тях при прехода от изходното в новото равновесно състояние.

(7)
$$W = -\left[-\frac{1}{2}M_1\varphi_1 - \frac{1}{2}M_2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\right] = \frac{1}{2}800\varphi_1^2 + \frac{1}{2}500\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)^2$$

A е работата на външния товар, извършена от него при прехода от изходното в новото равновесно състояние.

(8)
$$A = F\left(\delta_1 + \delta_2\right) = F\left(5\frac{\varphi_1^2}{2} + 4\frac{\varphi_2^2}{2}\right)$$

За пълната потенциална енергия на конструкцията се получава следният резултат:

(9)
$$\Pi(\varphi_1,\varphi_2) = \Pi_0 - \left[-\frac{1}{2} M_1 \varphi_1 - \frac{1}{2} M_2 \left(\varphi_2 - \varphi_1\right) \right] - F\left(\delta_1 + \delta_2\right) =$$
$$= \Pi_0 + \frac{1}{2} 800 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} 500 \left(\varphi_2 - \varphi_1\right)^2 - F\left(5\frac{\varphi_1^2}{2} + 4\frac{\varphi_2^2}{2}\right)$$

Условието за съществуване на екстремум е:

(10)
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = 0 \qquad 800\varphi_1 + 500(\varphi_2 - \varphi_1)\left(-1\right) - F\left(5\varphi_1 + 0\right) = 0$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = 0 \qquad 500(\varphi_2 - \varphi_1)\left(+1\right) - F\left(0 + 4\varphi_2 + 0\right) = 0$$

Тези две уравнения се записват по следния начин:

(11)
$$(800 + 500 - 5F)\varphi_1 - 500\varphi_2 = 0$$
$$-500\varphi_1 + \left(500 - 4F\right)\varphi_2 = 0$$

Ако се замени първото от тези две уравнения с тяхната сума и се сменят знаците на членовете на второто уравнение, от (11) се получават двете уравнения (3), които са получени със статическия подход. Затова и с енергетическия метод се получават същите критични големини на външния товар.

$$F_{1cr} = 61,9kN \qquad F_{2cr} = 323,1kN$$

Получиха се две големини на външния товар, при които са възможни две равновесни форми. Стойностите на ъглите φ_1 и φ_2, които определят тези две възможни равновесни форми се изчисляват от системата уравнения (3) или от (11).

Първа възможна равновесна форма

Системата (3) се записва за $F = F_{1cr} = 61,9kN$.

(12)
$$500\,\varphi_1 \;+\; (4*61,9-500)\varphi_2 = 0 \qquad 500\varphi_1 - 252,4\varphi_2 = 0$$
$$(5*61,9-800)\varphi_1 + 4*61,9\varphi_2 = 0 \qquad -490\varphi_1 + 247,6\varphi_2 = 0$$

От тази система хомогенни уравнения се получава:

(13) $\varphi_2 = 1,98098\varphi_1$ или $\varphi_1 = 0,5048\varphi_2$

Втора възможна равновесна форма

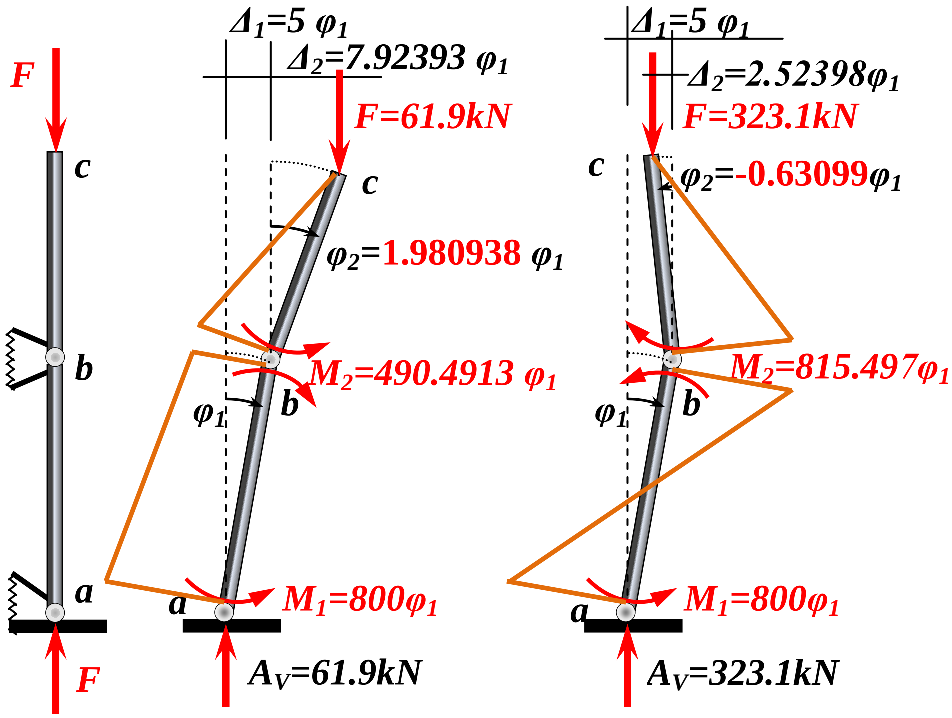
Системата (3) се записва за $F = F_{2cr} = 323,1kN$.

(14)
$$500\,\varphi_1 \;+\; (4*323,1-500)\varphi_2 = 0 \qquad 500\varphi_1 + 792,4\varphi_2 = 0$$
$$(5*323,1-800)\varphi_1 + 4*323,1\varphi_2 = 0 \qquad 815,5\varphi_1 + 1292,4\varphi_2 = 0$$

От тази система хомогенни уравнения за втората равновесна форма се получава:

(15) $\varphi_2 = -0,630994\varphi_1$ или $\varphi_1 = -1,5848\varphi_2$

Двете възможни равновесни форми са показани на фигура 3. Освен геометричните им параметри на фигурата са показани и огъващите моменти.



Фиг.3 Възможни нови равновесни състояния

Докато критичните големини на външния товар се изчисляват точно, останалите параметри на двете възможни равновесни форми – премествания и усилия, се изчисляват с точност до един ненулев множител – ъгълът φ_1.

Лесно се установявя, че всички независими уравнения за равновесие са удовлетворени.

Б. Изследване по теория от III$^{\text{ти}}$ ред

Приема се, ъглите $\boldsymbol{\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_2}$ са с крайна големина и се използват точните нелинейни геометрични зависимости.

$$\Delta_1 = 5\sin\varphi_1 \qquad \Delta_2 = 4\sin\varphi_2$$
$$\delta_1 = 5(1-\cos\varphi_1) \qquad \delta_2 = 4(1-\cos\varphi_2) \tag{16}$$

Статически метод – за възможната нова равновесна форма се записват се всички независими условия за равновсие и се търси тяхно ненулево решение.

$$\begin{aligned} &\sum H = 0 && A_h = 0 \\ &\sum V = 0 && A_V = F \\ &\sum M_b^{bc} = 0 && F4\sin\varphi_2 - 500(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ &\sum M_a = 0 && F(4\sin\varphi_2 + 5\sin\varphi_1) - 800\varphi_1 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

От четвъртото уравнение на (17) се изважда третото и се получава следната нелинейна хомогенна система уравнения:

$$\begin{aligned} &F4\sin\varphi_2 - 500(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ &F5\sin\varphi_1 - 800\varphi_1 + 500(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

От тази система се получават следните зависимости:

$$125\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sin\varphi_2}=100\frac{2,6\varphi_1-\varphi_2}{\sin\varphi_1}=F \tag{19}$$

От (19) следва, че за всяка стойност на ъглите φ_1 и φ_2, удовлетворяващи първото равенство, съществува една такава конкретна големина на силата *F*, при която системата е в равновесие.

Равенството

$$125\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sin\varphi_2}=100\frac{2,6\varphi_1-\varphi_2}{\sin\varphi_1} \tag{20}$$

се използва за определяне на ъглите $\boldsymbol{\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_2}$. Приема се конкретна възможна стойност на единия ъгъл и от (20) се изчислява съответната големина на другия ъгъл.

С изчислените стойности на ъглите $\boldsymbol{\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_2}$ се пресмята големината на силата ***F***.

Резултатите от изчисленията, съответстващи на различни големини на ъглите $\boldsymbol{\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_2}$ са записани в таблици 1 и 2.

Приемани са стойности на $\boldsymbol{\varphi_1}$ и от (20) са изчислявани съответните стойности на $\boldsymbol{\varphi_2}$. След това са изчислявани големините на силата ***F*** и на останалите геометрични и силови параметри на възможна равновесна форма.

За всяка приета стойност на $\boldsymbol{\varphi_1}$ от (20) се получават по две стойности на $\boldsymbol{\varphi_2}$.

Таблица 1. Първа възможна равновесна форма

φ_1 градуси	0.5	1	2	3	4	5	10
φ_1 радиани	0.008727	0.017453	0.034907	0.05236	0.069813	0.087266	0.174533
φ_2 градуси	0.990742	1.980834	3.96141	5.941096	7.91915	9.892653	19.74022
φ_2 радиани	0.017287	0.034572	0.06914	0.103692	0.138215	0.172659	0.344532
$\boldsymbol{\varphi_2 / \varphi_1}$	**1.98098**	**1.98093**	**1.98070**	**1.98037**	**1.97979**	**1.97853**	**1.97402**
F	**61.90294**	**61.91061**	**61.94049**	**61.99136**	**62.05931**	**62.13003**	**62.91481**
Δ_1 сантиметри	4.3633	8.7262	17.4497	26.1680	34.8782	43.5779	86.8241
Δ_2 сантиметри	6.9163	13.8261	27.6338	41.4024	55.1102	68.7211	135.1024
δ_1 сантиметри	0.01904	0.076152	0.3046	0.6852	1.2180	1.9027	7.5961
δ_2 сантиметри	0.05980	0.239022	0.9557	2.1485	3.8146	5.9475	23.5065
$\boldsymbol{M_1}$	6.9813	13.9626	27.925	41.888	55.851	69.813	139.626
$\boldsymbol{M_2}$	4.2825	8.5594	17.117	25.666	34.201	42.696	84.999

Таблица 2. Втора възможна равновесна форма.

φ_1 градуси	0.5	1	2	3	4	5	10
φ_1 радиани	0.0087266	0.0174533	0.0349066	0.0523599	0.0698132	0.0872665	0.1745329
φ_2 градуси	-0.315489	-0.630971	-1.261789	-1.892248	-2.522407	-3.150949	-6.285513
φ_2 радиани	-0.005506	-0.011013	-0.022022	-0.033026	-0.044024	-0.054994	-0.109703
φ_2 / φ_1	**-0.630979**	**-0.630971**	**-0.630894**	**-0.630749**	**-0.630602**	**-0.63019**	**-0.628551**
F	**323.10649**	**323.11395**	**323.15757**	**323.23574**	**323.32782**	**323.51601**	**324.52053**
Δ_1 сантиметри	4.3633	8.7262	17.4497	26.1680	34.8782	43.5779	86.8241
Δ_2 сантиметри	-2.2025	-4.4049	-8.8082	-13.2080	-17.6040	-21.9867	-43.7932
δ_1 сантиметри	0.01904	0.0762	0.3046	0.6852	1.2180	1.9027	7.5961
δ_2 сантиметри	0.00606	0.0243	0.0970	0.2181	0.3876	0.6047	2.4045
M_1	6.981	13.963	27.925	41.888	55.851	69.813	139.626
M_2	-7.116	-14.233	-28.464	-42.693	-56.919	-71.130	-142.118

От показаните резултати следва:

1. С теорията от втори ред се получават достатъчно точно критичните големини на външния товар.
2. С теорията от втори ред новите възможни равновесни състояния се получават по вид, като геометричните и силовите им параметри се изчисляват с точност до един ненулев множител.
3. Теорията от трети ред показва, че при дори малки стойности на параметрите, определящи възможни нови равновесни състояния, в конструкцията се получават недопустимо големи премествания. Затова приеманията на теорията от втори ред са оправдани.