X Уравнение, свързано с числото „e"

Изхождайки от уравнението: $x^{x+1} = (x+1)^x$, което се преобразува на:

$$x = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

(тук десният член е формулата за „e" при $x \to \infty$),

за стойност на x се получава 2,2932..

[Дали числото 2,2932.. е забележително и с нещо друго?]

XI Едно уравнение с 2 неизвестни

Може само едно уравнение с 2 неизвестни да бъде решено. Ето пример:

$$y - 2 = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$$

Тук $x = 1$ и $y = 2$ – единствено решение

XIII Две мои задачи
(подходящи за кандидат-студентски изпити)

1. Да се намерят радиусите на описаната окръжност R и вписаната окръжност r на тъпоъгълен триъгълник, чийто страни са 3 последователни цели числа.

Решение:

От система неравенства:

$x + (x+1) > (x+2)$ – с-во на триъгълник

и $x^2 + (x+1)^2 < (x+2)^2$ – за тъпоъгълен триъгълник, се намира, че $x = 2$ и страните на триъгълника са 2, 3 и 4.

Определя се лицето по Хероновата формула, след което от зависимостите:

$$S = \frac{abc}{4R} \quad и \quad S = \frac{p \cdot r}{2},$$ се намира:

$$R = \frac{8}{\sqrt{15}} \approx 2,06 \quad и \quad r = \frac{\sqrt{15}}{6} \approx 0,65$$

2. Да се намери височината на триъгълна пирамида, чиято основа е със страни 13, 14 и 15 cm, а трите околни ръба са взаимно перпендикулярни един към друг.

Решение: (5)

Намира се лицето на основата по Херон, а обемът на пирамидата V може да се изрази като $\frac{Sh}{3}$ и като $\frac{abc}{6}$, където a, b и c са околните ръбове. Те се намират от система от 3 уравнения с 3 неизвестни:

$$a^2+b^2=13^2$$
$$b^2+c^2=14^2 \quad \text{и}$$
$$a^2+c^2=15^2$$

Тогава: $h=\frac{3V}{S}=\frac{abc}{2S}$

Отговор: $h=\frac{3\sqrt{55}}{4}\doteq 5,5$ cm

P.S. Задачите не са трудни, но изискват логическо мислене и познаване на материала по геометрия и стереометрия.

XIII Доказване формулата за повърхнина на сфера

Доколкото ми е известно, в елементарната математика няма доказателство за повърхнина на кълбо $S\ (=4\pi R^2)$. Тук се предлага едно такова доказателство;

В сферата се вписват правилни n-ъгълни пирамиди с общ връх – центъра на сферата. Височините на пирамидите са равни на R на сферата. За да могат пирамидите да прилепнат плътно една до друга, те могат да бъдат само триъгълни, четириъгълни и шестоъгълни, т. е. $n = 3, 4$ и 6. Това се доказва по следния начин: Задачата е аналогична с тази, от какви правилни многоъгълници трябва да е покрита равнина, за да може те да обхванат цялата повърхност, без празни места.

Тъй като ъгълът на правилен многоъгълник е равен на $\frac{180(n-2)}{n}$, то величината Nброя $= \frac{360^\circ}{\frac{180(n-2)}{n}}$ трябва да бъде цяло число. Като положим $m = n-2$, се получава:

$$N = \frac{2n}{n-2} = \frac{2(m+2)}{m} = 2 + \frac{4}{m} \Rightarrow \text{цяло число}$$

За да бъде N цяло число, трябва m да е 1, 2 или 4, което съответства на:

$n = 3$; триъгълник; $N = 6$ $(6 \times 60^\circ = 360^\circ)$

$n = 4$; четириъгълник; $N = 4$ $(4 \times 90^\circ = 360^\circ)$ и

$n = 6$; шестоъгълник; $N = 6$ $(3 \times 120^\circ = 360^\circ)$.

Други стойности на n не са възможни.

И така, обемът на вписаните правилни пирамиди, допиращи се плътно една до друга е $V = \frac{\Sigma B . R}{3}$, което е $\frac{4}{3}\pi R^3$ (обем на кълбото)

Тук ΣB е сумата от лицата на основите на пирамидите, което е техният брой K по лицата им B_0. Когато K се стреми към ∞, а B_0 към 0, то ΣB е търсената повърхнина на сферата „S".

Тогава, от $\frac{S . R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$ се получава:

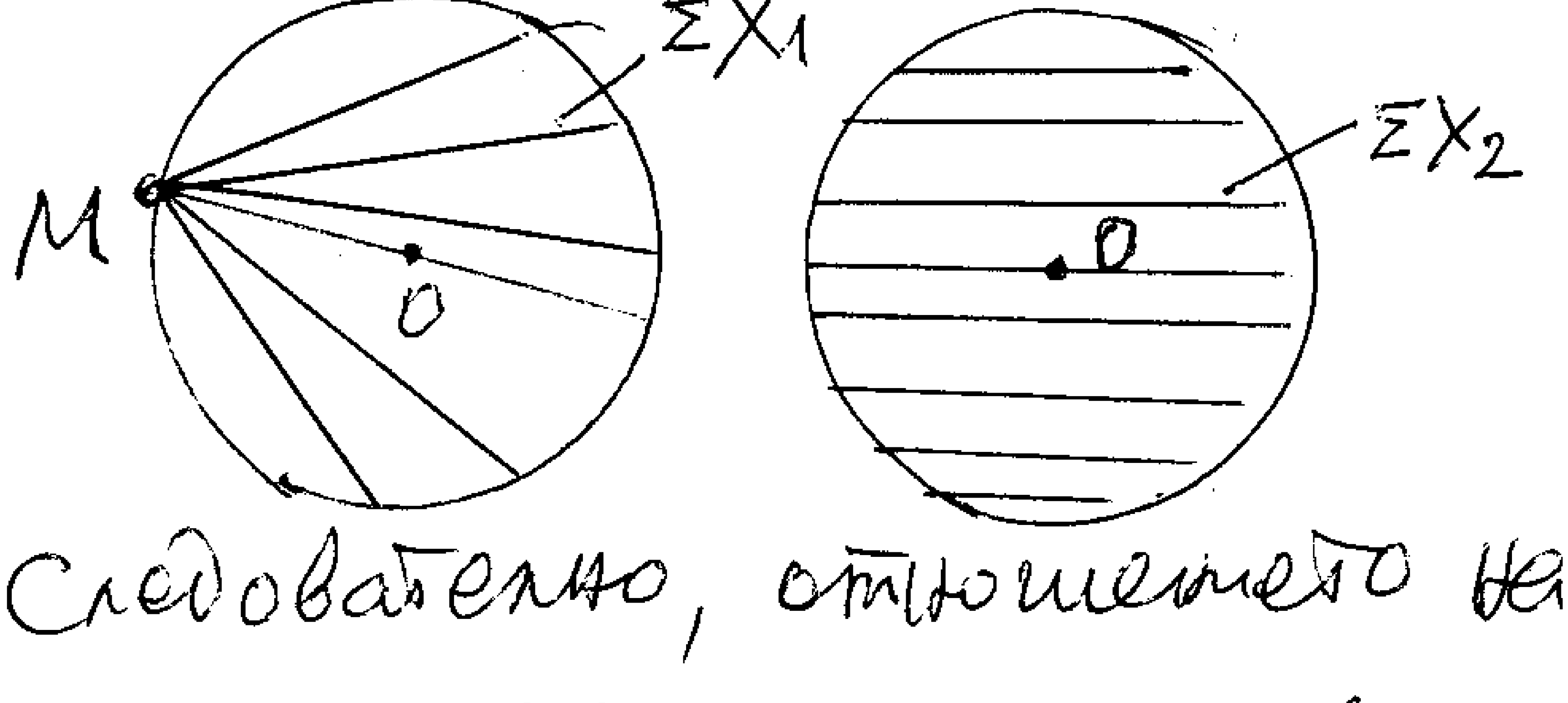
$$S = 4\pi R^2$$

XIV Отношение на сумата на всички успоредни хорди в кръга, към сумата от всички радиуси

Подобно на т. IV, където е намерено отношението на сумата от дължините на всички радиуси в кръга, към сумата от дължините на хордите, прекарани от една точка. Тук е определено отношението на сумата от дължините на всички успоредни хорди към сумата от дължините на същия брой радиуси (когато този брой клони към безкрайност.

$$\frac{\Sigma r_i}{\Sigma X_{1i}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \frac{\Sigma X_{2i}}{\Sigma r_i} = \frac{\pi}{2}, \text{ където}$$

X_{1i} са хордите, прекарани през 1 точка, а X_{2i} са успоредните хорди. (включително и диаметъра)



X – хорда

Следователно, отношението на сумите на хордите от една точка, към сумите от дължините на успоредните хорди в кръга е:

$$\frac{\sum X_1(i)}{\sum X_2(i)} = \frac{8}{\Pi^2} \approx 0,81056$$

XV Граници при изчисляване на числото „П"

Изхождайки от лице на триъгълник с бедра R и връх в центъра на окръжност:

$$S = \Pi R^2 = \frac{1}{2} n \cdot R^2 \cdot \sin\frac{360}{n}$$; за П се получава формулата:

$$\Pi = \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \sin\frac{360}{n}}{2}$$

За вписан правилен многоъгълник в окръжност, лицето му е: $S_{вп} = \frac{n \cdot \sin\frac{360}{n} \cdot R^2}{2}$,

а за описан: $S_{оп} = n \cdot tg\frac{180}{n} \cdot R^2$ (при $n \to \infty$).

Следователно, за числото П е в сила неравенството:

$$n \cdot tg\frac{180}{n} > \Pi > \frac{n \cdot \sin\frac{360}{n}}{2}$$

XVI Обобщена формула за зависимостта:

$$S=\sum_1^n \frac{n^p}{m^n} \quad (\text{при } n\to\infty)$$

За частни случаи на формулата се получава:

$$\sum_1^n \frac{1}{2^n};\ S=1 \quad \dots \quad \sum_1^n \frac{1}{m^n};\ S=\frac{1}{m-1}$$

$$\sum_1^n \frac{n}{2^n};\ S=2 \quad \dots \quad \sum_1^n \frac{n}{m^n};\ S=\frac{m}{(m-1)^2}$$

$$\sum_1^n \frac{n^2}{2^n};\ S=6 \quad \dots \quad \sum_1^n \frac{n^2}{3^n};\ S=\frac{12}{8} \quad \dots \quad \sum_1^n \frac{n^2}{m^n};\ S=\frac{m(m+1)}{(m-1)^3}$$

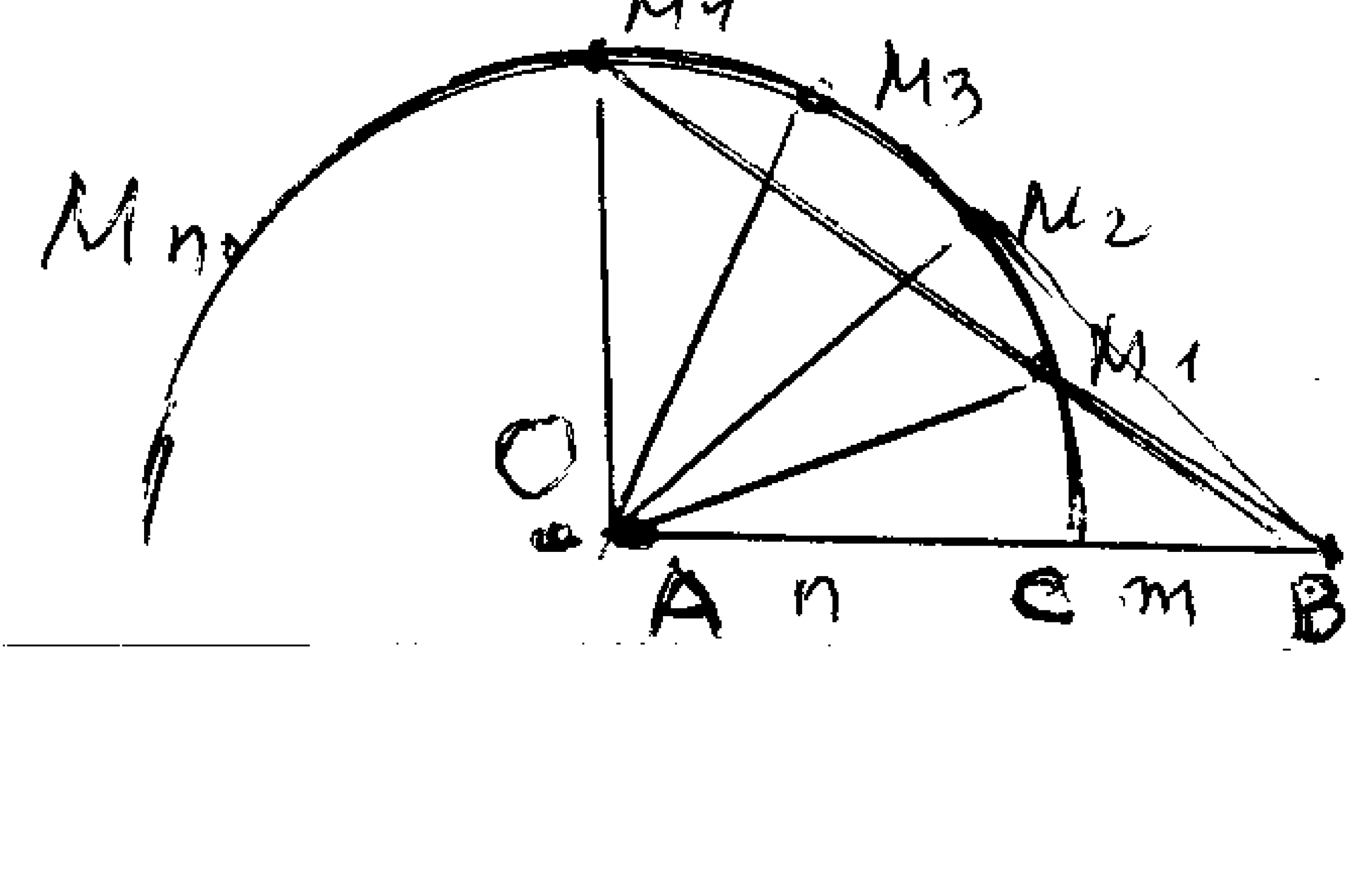
$$\sum_1^n \frac{n^3}{m^n};\ S=\frac{m(m+1)(m+2}{(m-1)^4}$$

следователно, сумата $\sum_1^n \frac{n^p}{m^n}=\frac{[m+(p-1)]!}{(m-1)!\,(m-1)^{p+1}}$

Формулата има редица частни приложения.

XVII Интересни геометрични места на точки.

Геометричното място на точки, разстоянията на които до двата края на отсечка AB да е постоянно отношение $n:m$ $(n:m=k)$, е окръжност с радиус $r=\frac{ka}{1-k^2}$, където a е дължината на отсечката AB.



Според чертежа вляво, имаме: $\frac{CA}{CB}=\frac{n}{m}$, а също

$$\frac{M_i A}{M_i B} = \frac{n}{m}. \text{ Тук: } AC = \frac{Ka}{1+K} \text{ и } CB = \frac{a}{1+K}$$

при заместване на K, се получава: $AC = \frac{na}{n+m}$;

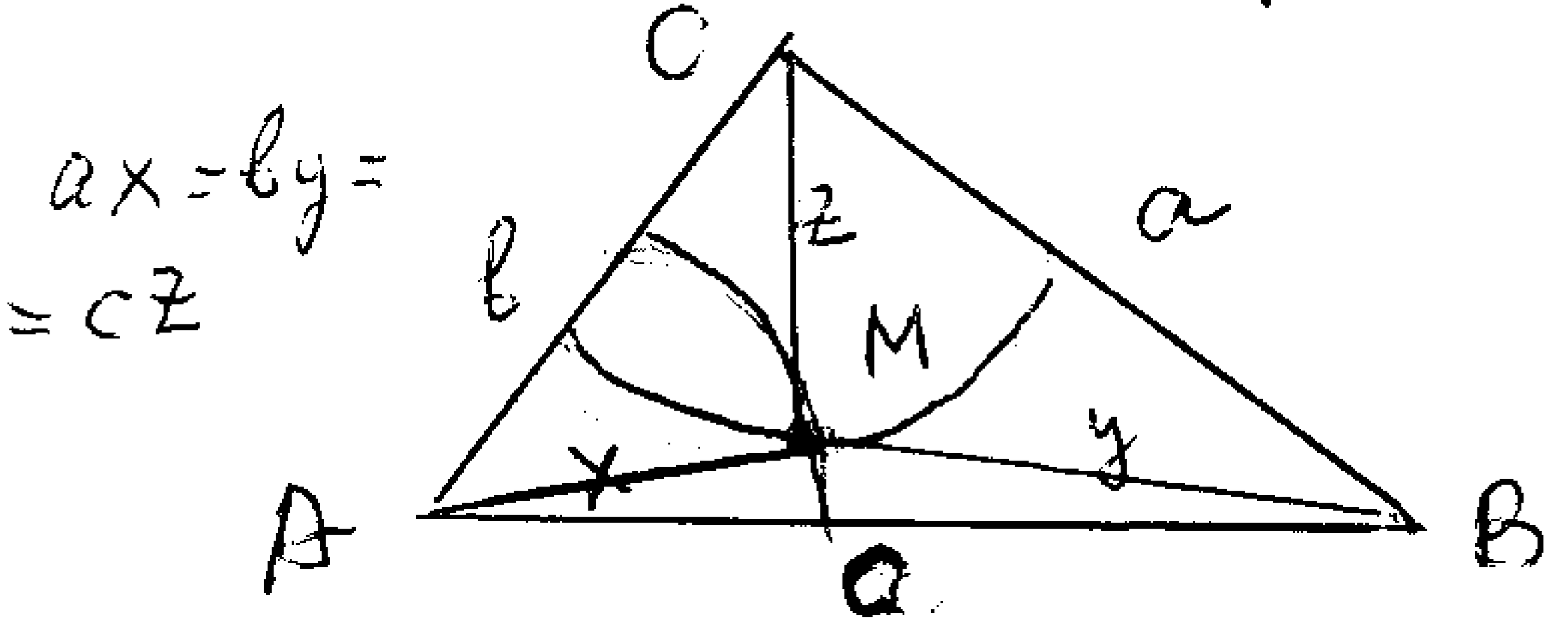
$$CB = \frac{ma}{n+m} \text{ и } r = \frac{n.m.a}{m^2 - n^2}.$$

Така окръжността може да се дефинира като геометрично място на точки, за които отношението на разстоянията до 2 дадени точки A и B е постоянна величина!

Аналогично може да се определи, че при сумата от разстоянията кривата е елипса, за разликата от разстоянията – хипербола, а при произведението на разстоянията – елипсоподобни криви, първите 3 от които са с „вдлъбнатина" в средата.

Изложеното тук (за отношенията на разстоянията) дава възможност да се реши следната интересна зависимост: Да се намери точка в триъгълника ABC, така че разстоянията от нея до върховете на триъгълника – X, Y и Z да удовлетворяват условието: $aX = bY = cZ$. Тук a, b и c са дължините на страните на триъгълника.

На чертежа точките A_1, B_1 и C_1 са пресечните точки на ъглополовящите със отсрещната страна. Друг вариант на задачата, е да се определи точката N от условието:



$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

XVIII За реда на Фибоначи

1. Сума от първите n члена:

$1+1+2+3+5+ \dots a_n \quad (a_n = a_{n-2} + a_{n-1})$

$$S_n = a_n + a_{n+1} - (a_{n+2} - 1)$$

За общия случай на реда

$a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + 2a_2 \dots a_n$

$(a_n = a_{n-2} \cdot a_1 + a_{n-1} \cdot a_2)$

$$S_n = a_n \cdot a_1 + (a_{n+1} - 1) \cdot a_2$$

2. Отношение на сумите за 2 съседни стойности на a (a_{n-1} и a_n)

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{a_n + a_{n+1} - 1}{a_{n-1} + a_n - 1} = \frac{a_{n+2} - 1}{a_{n+1} - 1}.$$

(Това отношение при $n \to \infty$ дава числото $R = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$)

3. Сума от реципрочните стойности на реда на Фибоначи.

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8} \dots + \frac{1}{a_n}$$

При достатъчно големи стойности на n е видно, че $\sum_{1}^{n} \frac{1}{a_n}$ е ограничена от стойността 3,36. (?)

4. Сума от номера на члена върху стойността:

$$S\, N/n = \frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{5}+\frac{6}{8} \dots + \frac{N}{a_n}$$

аналогично, тази сума е ограничена от 9,274 (?)

5. Някои други вариации на реда на Фибоначи:

5.1) $a_n = a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1}$ (сума от предните $\underline{\underline{3}}$ члена)

редът е: 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193 .....

При достатъчно големи стойности на n:

$$\frac{N_n}{N_{n-1}} \doteq 1{,}8393 \; ; \quad \frac{N_n}{N_{n-2}} = 3{,}3829 \; (= 1{,}8393^2)\,!$$

$$\frac{N_n}{N_{n-1}+N_{n-2}} \doteq 1{,}1915 \; ; \quad \frac{N_n}{N_{n-1}+N_{n-2}+N_{n-3}} = 1$$

5.2) При $a_n = a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1}$ (сума от предните 4 чл.)

$$\frac{N_n}{N_{n-1}} \doteq 1{,}9276 \; ; \quad \frac{N_n}{N_{n-2}} = 1{,}9276^2 \; ; \quad \frac{N_n}{N_{n-3}+N_{n-2}+N_{n-1}} = 1{,}078$$

5.3. Изводи:

а) за оригиналния ред на Фибоначи имаме:

$$\frac{N_n}{N_{n-1}} = R\ ;\quad \frac{N_n}{N_{n-2}} = R+1\ ,\quad \frac{N_n}{N_{n-1}+N_{n-2}} = 1;\quad \frac{N_n}{N_{n-1}+N_{n-2}+N_{n-3}} = \frac{R}{2}$$

($R = 1,618\ldots$ – златното сечение)

б) за всички суми не само от 2, а от m предишни члена: $\left(\frac{N_n}{N_{n-1}}\right)^2 = \frac{N_n}{N_{n-2}}$. За първото отношение границата при $m \to \infty$ е 2, а за II$^{\text{то}}$ – 4

5.4. Ако всеки член е не сумата, а разликата от 2$^{\text{та}}$ предидущи, редът е:

$1, 2, -1, 3, -4, 7, -11, 18, -29 \ldots \quad \frac{N_n}{N_{n-1}} = -R$

5.5. Ако всеки член е произведението на двата предидущи, редът е:

$1, 2, 2, 4, 8, 32, 256 \ldots$, или

$1, 2^1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^5, 2^8$, т.е. степените на 2^n, са оригиналният ред на Фибоначи

и тогава отношението $\frac{N_n}{N_{n-1}} = N_{n-2}$

Забележка: Тук означенията a_i и N_i са идентични

XIX За „златните сечения"

„Класическото „златно сечение" (з.с.) на отсечка с $\ell=1$ е делението ѝ на 2 части —

$$a=\frac{3-\sqrt5}{2}\ (\doteq 0{,}382) \text{ и } b=\frac{\sqrt5-1}{2}\ (\doteq 0{,}618)$$

1. Вариации на з.с.:
   а) аритметично $\Rightarrow b-a=1-b$; $a=\frac13$ и $b=\frac23$
   б) геометрично — класическото з.с.
   в) степенно: $a^b=b$; $a\doteq 0{,}41$ и $b\doteq 0{,}59$
   г) коренно: $\sqrt[b]{a}=\sqrt{b}$; $a\doteq 0{,}69$; $b=0{,}31$
   д) $\sqrt[a]{b}=\sqrt[b]{a}$ → няма решение

2. При преминаване в безкраен ред от з.с., където следващото $a'=b$, $a''=b'$ и т.н., се получава геометрична прогресия с първи член $\frac{3-\sqrt5}{2}$, която надясно има вида:

$$\underbrace{\frac{3-\sqrt5}{2}}, \frac{\sqrt5-1}{2}, 1, \frac{\sqrt5+1}{2}, \frac{\sqrt5+3}{2}, \frac{2\sqrt5+4}{2}, \frac{3\sqrt5+7}{2} \text{ и т.н.}$$

а наляво:

$$\ldots\ldots \frac{7-3\sqrt5}{2}, \frac{2\sqrt5-4}{2}, \underbrace{\frac{3-\sqrt5}{2}}$$

Тази геометрична прогресия (безкрайна в 2-те посоки) има следните интересни свойства:

— $q_{p}=\frac{\sqrt5+1}{2}$. $(=R)$

— Наляво и надясно от 1, стойностите са „спрегнати" т.е. в числителите надясно знакът е +, а наляво –.

– всеки член $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ (както в реда на Фибоначи

– коефициентите пред $\sqrt{5}$ са самият ред на Фибоначи

– сумата на всички членове отляво на $a_n = a_{n+2}$

– $a_1^2 = a_2 \ldots a_n^2 = a_{2n}$;

$a_n^3 = a_{3n}$ и в общ вид: $a_n^k = a_{kn}$

3. Ако отсечка $\ell = 1$ се раздели на 3 части в a, b и c, така че $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{\ell=1}$, то се получава З.С. от 3 части, които са:

$a = 0,162$; $b = 0,295$ и $c = 0,543$, като те образуват геометрична прогресия с $q = 1,842$

Ако отсечката се раздели на n части, се получава геометрична прогресия: $a, b, c \ldots n, 1$, където $aq^n = 1$ и $q^n - q^{n-1} - q^{n-2} \ldots - q - 1 = 0$

Ето как изглеждат тези редове

Брой части на З.С.	Дължини на частите	q на ''
$m =$ 2	0,382 и 0,618	1,618
3	0,162; 0,295 и 0,543	1,842
4	0,0724; 0,1396; 0,2691 и 0,5185	1,928
5	0,0337; 0,06629; 0,1303; 0,2562 и 0,5086	1,966
6	0,0154; 0,032; 0,0646; 0,1262; 0,2542 и 0,5042	1,983

При брой на частите $m \to \infty$ са на лице свойствата: $q = 2$ и за дължините на частите $a_1, a_2 \dots a_n$ – геометричната прогресия: $\dots 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2$ $\left(\sum_{-\infty}^{m} a_i = 1\right)$

4. Някои з.с. за геометрични фигури и тела.

а) Триъгълник, чийто ъгли са в з.с.

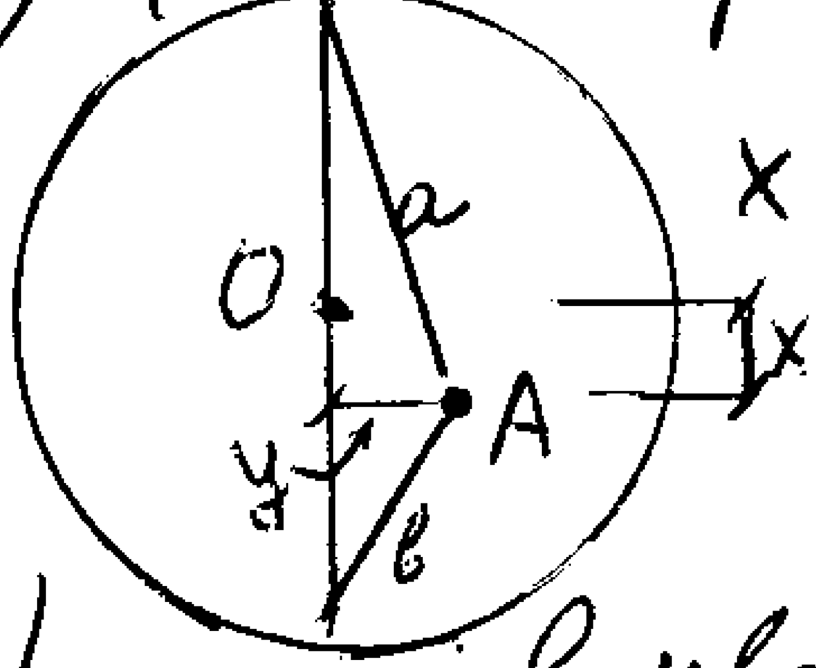
$\alpha = 29,16°$; $\beta = 53,1°$ и $\gamma = 97,74°$

за четириъгълник:

$\alpha = 26,08°$; $\beta = 50,26°$; $\gamma = 96,88°$ и $\delta = 186,78°$.

При шестоъгълник, не е възможно ($\Sigma = 363°!$)

б) точка в кръга, за която $\frac{a}{b} = R$ (Точката е A)



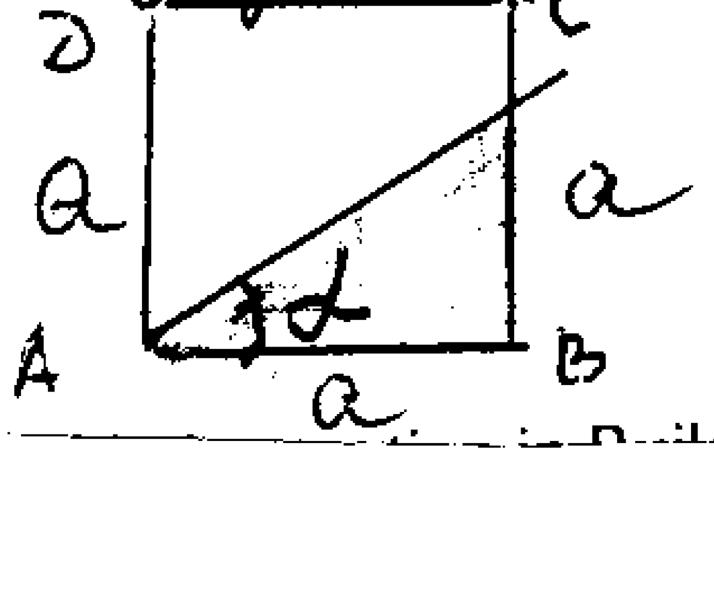
$$x = y = \frac{R + 2 + \sqrt{3R - 3}}{2R} \doteq 0,69$$

в) точка в квадрат, за която $\frac{a}{b} = R$

(аналогично: $x = y = \dfrac{\sqrt{3R+3} - 2}{2R} \doteq 0,22$)

г) з.с. на площта на кръг чрез хорда – централният ъгъл на хордата е $158,5°$

г) з.с. на квадрат, чрез права през един от върховете му



$\alpha = 37,5°$

a – страната на квадрата

д) За дадена точка в кръга A, коя е хордата, която се дели от т. A в з.с.?

В хордата MN – частта $MA = 0{,}236\, r$

(r е радиусът на кръга)

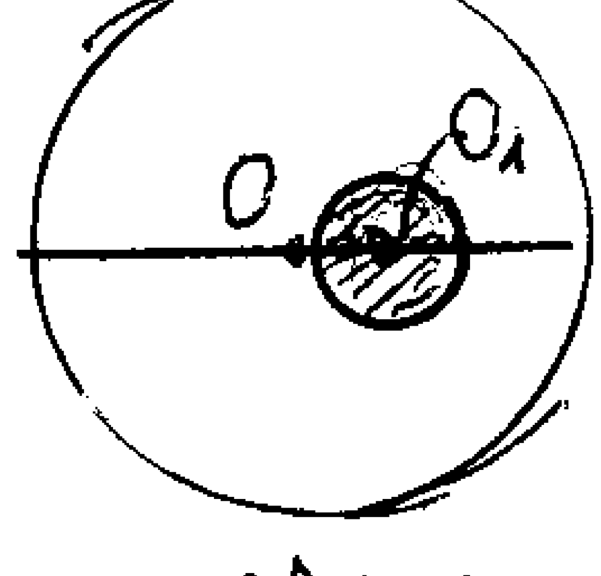
е) з.с. на кръг от сектор –

ъгълът α на сектора е $\alpha = 180(3-\sqrt{5}) \approx 137{,}5^\circ$

ж) деление на обема на сфера в з.с. чрез равнина – частите V_1 и V_2 са: $V_1 \doteq 1{,}6\, r^3$ и $V_2 \doteq 2{,}6\, r^3$ (общ обем $\frac{4}{3}\pi r^3$)

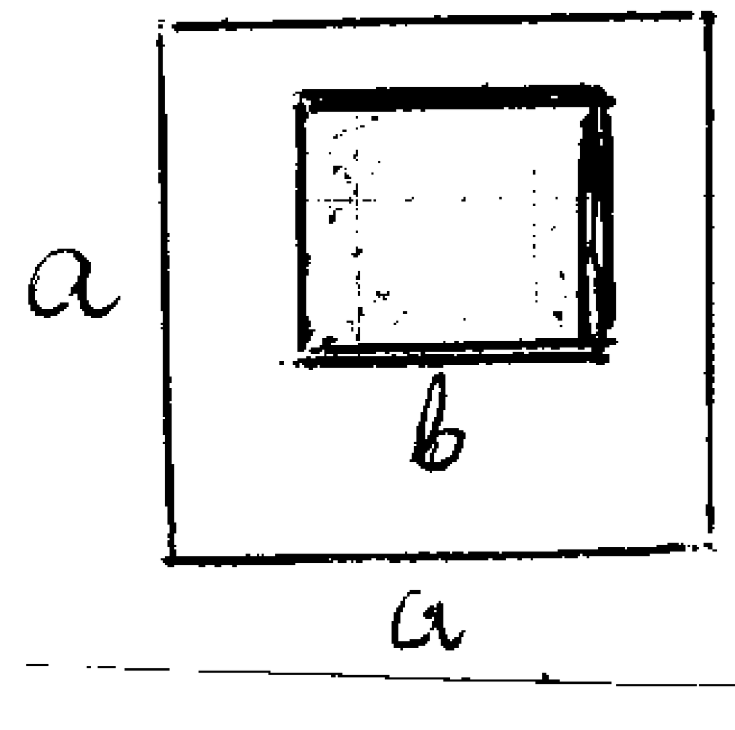
з) „двойни" златни сечения

– в кръг с радиус R е разположен малък кръг с радиус r, така че центъра на малката окръжност дели диаметъра на голямата в з.с, а отношението на площите им също е в з.с.



– малката окръжност е с радиус $r = 0{,}618\,(R-1)$

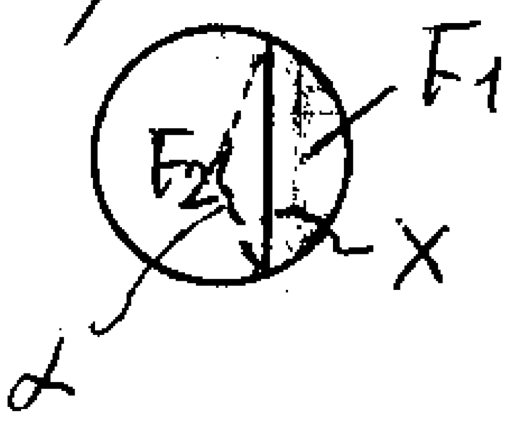
– също, за квадрати



ако страната на големия квадрат е a, то тази на малкия е:

$b \doteq 0{,}78\, a$

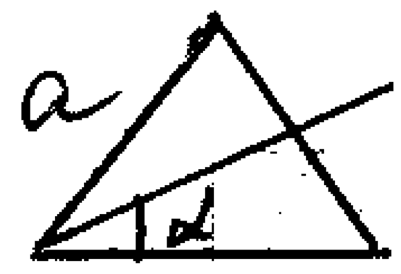
и) Златно сечение на кръг чрез хорда



$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_2}{\pi r^2}$; $\alpha = 158{,}5^\circ$; $x = 0{,}186\, r$

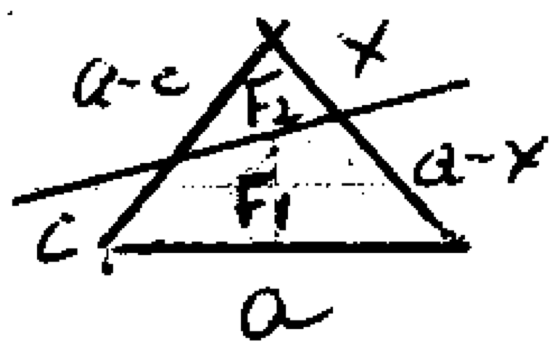
r - радиус на кръга

й) Зл. сечение на равностранен триъгълник (през върха)



$\alpha = 21^\circ 37'$ a - страната на Δ.

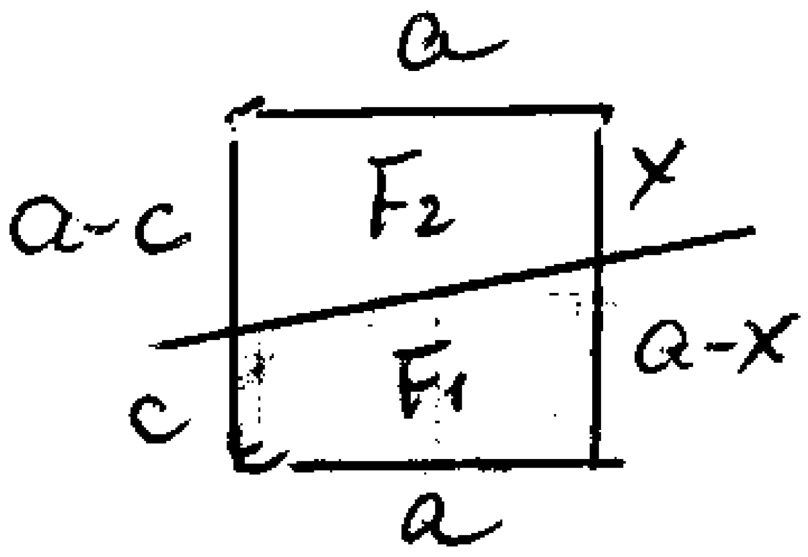
к) Същото, но не през върха (дадено е c)



$$x = \frac{3a^2 - 3ac - a^2\sqrt{5}}{2(a-c)}$$

a - страната на Δ.

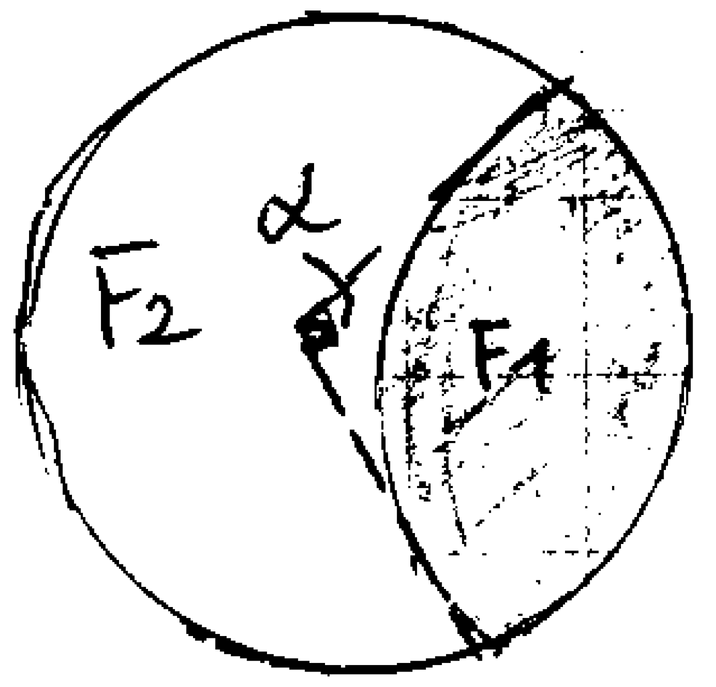
л) З.с. за квадрат, но не през върха (дадено c)



$$x = 2a - c - \sqrt{3a^2 + 8ac + 2c^2}$$

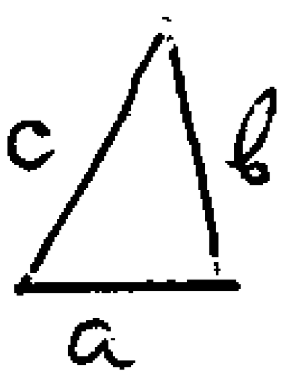
a - дадената страна на квадрата

м) З.с. на кръг чрез дъга със същия радиус (З.с. на луна!)



$\alpha = 119^\circ 7'$

н) З.с. за трите страни на триъгълник



$c > b > a$ $c \doteq 1{,}62a$

$b \doteq 1{,}27a$

XX Доказателства за 3 интересни задачи

1. За деветичната проверка

При умножение на 2 големи числа:

$N_1 = a_1 b_1 c_1 \dots p_1$ и $N_2 = a_2 b_2 c_2 \dots p_2$, които се равняват на $N_3 = a_3 b_3 c_3 \dots p_3$, може да се направи проверка: $X_1 = a_1 + b_1 + c_1 \dots + p_1 - 9K$, където $K = 0, 1, 2 \dots$ – докато се получи X_1 да е едноцифрено число. Аналогично се получават X_2 и X_3.

Тогава, за да е вярно умножението $\rightarrow X_1 \cdot X_2 = X_3$

Доказване: Двете числа, (например 4-цифрени) могат да се представят като: $N_1 = 999\,a_1 + 99\,b_1 + 9\,c_1 + p_1$ (Аналогично – N_2). При умножението им, не се дели на 9 само члена $p_1 \cdot p_2 - 9K$ $(K = 0 \div 8)$, и за да е вярно умножението, следва $p_1 \cdot p_2 = p_3$ $(-9K)$

2. Интересни „задачи-фокуси" се базират на факта, че ако от трицифрено число $100a + 10b + c$ ($a > c$ най-малко с 2 единици), извадим обратното: $100c + 10b + a$, а след това остатъка му съберем с обратния му, се получава винаги 1089 (33^2).

Доказателство:

Извършват се следните действия:

$$\begin{array}{r} 100a+10b+c \\ - \quad a+10b+100c \\ \hline 100(a-c-1)+90+(10+c-a) \\ + \quad (a-c-1)+90+100(10+c-a) \\ \hline \end{array}$$

$$100a-100c-100+90+10+c-a+1000+100c-100a+$$
$$+90+a-c-1=1089$$

3. Задачата на византийскит математик Никанор гласи, че може да се познае числото N ($1 \div 105$), ако са известни целите остатъци X, y и Z при делението му на 3, 5 и 7. Търсеното число е: $N = 70X + 21y + 15Z - 105K$, където $K = 0, 1$ или 2, до получаване на $N < 105$

Доказателство:

числото е двуцифрено ($N = 10a+b$), а остатъците X, y и Z могат да се представят като:

$$X = a+b-3K_1 \quad (K_1 = 0 \div 6)$$
$$y = b-5K_2 \quad (K_2 = 0 \div 1)$$
$$Z = 3a+b-7K_3 \quad (K_3 = 0 \div 5)$$

За да се получат остатъците X, y и Z, следва K_{1-3} да бъдат умножени с коефициент равен на делителя!

Тогава: $N = 70x+21y+15Z = 70(a+b-3K_1)+21(b-5K_2)+$
$+15(3a+b-7K_3) = 10a+b+105(a+b-2K_1-K_2-K_3)$

Тук $105(a+b-2K_1-K_2-K_3) = K$, което има стойности 0, 1 и 2.

$$N = 10a+b+105K$$

XXI Доказване, че системата: $x+y = xy = x^y$ няма друго решение, освен $x = y = 2$.

Съвместното решаване на първото и второто равенства дава: $x = \frac{y}{y-1}$ и $y = x^{y-1}$. От тук

$$y = \frac{y^{y-1}}{(y-1)^{y-1}} \quad \text{и} \quad y^{y-2} = (y-1)^{y-1} \quad *)$$

За реално решение на *) следва $y \geq 2$, но при $y > 2$, стойностите y и $(y-1)$ са съответно нечетно и четно числа, т.е. *) няма решение.

Остава само $y = x = 2$.

XXII Освен известните аритметична (÷) и (∺) геометрична прогресии, може да се предложат и още:

⋮÷⋮ $a^{0p}(=1), a^p, a^{2p}, a^{3p} \ldots a^{mp}$ и

⁞÷⁞ $a, a^p, a^{p^2}, a^{p^3}, a^{p^4} \ldots a^{p^m}$

Например, за a и $p = 2$, прогресиите са:

$1, 4, 16, 64, 256, 1024 \ldots a_n$

и $2, 4, 16, 256, 65536 \ldots a_n$

За първата от тях общият член a_n се получава като: – за нечетно $n \to a_n = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)^2$

– за четно $n \to a_n = a_{\frac{n}{2}} \cdot a_{\frac{n+1}{2}}$

За втората прогресия: $a_n = (a_{n-1})^2$

XXIII За формулата за $n!$

Известната формула на Стирлинг е универсална, но е доста сложна. За малки сравнително стойности на n (до $n=15$) може да се приложи следната проста зависимост:

$$n! = \left(\frac{n+1{,}55}{2{,}55}\right)^2$$

. Тя е получена чрез приблизителните решения на уравненията:

$n! = 1^n \rightarrow n = 1$; $n! = 2^n \rightarrow n \doteq 3$; $n! = 3^n \rightarrow n \doteq 6$; $n! = 4^n \rightarrow n \doteq 8$ .... $n! = p^n \rightarrow$ тук $n \doteq 2{,}55p - 1{,}55$ и $p = \frac{n+1{,}55}{2{,}55}$. Тогава:

$$n! = p^n = \left(\frac{n+1{,}55}{2{,}55}\right)^2 \quad (1)$$

Други 2 варианта за ! са:

$$n! = \left(\frac{n}{e}+1\right)^n \ (2) \quad \text{и} \quad n! = \frac{3-\sqrt{5}}{2}n + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ (3)$$

Например, за $n=10$ се получават стойностите:

по Стирлинг 3 700 000

по (1) 3 650 000 (по-точно от Стирлинг!)

по (2) 3 900 000

по (3) 3 150 000

истинска стойност: $10! = 3.628\,800$

XXIV Две свойства на триъгълник и конус

1. Ако триъгълник се раздели на n части чрез $n-1$ успоредни на основата прави, то квадратите на техните дължини образуват аритметична прогресия с $d = \ell_1^2$ (Доказано от инж. Кирил Брънеков)

Доказва се, че всяко $\ell_n = \sqrt{\frac{\ell_{n-1}^2 + \ell_{n+1}^2}{2}}$

и се получава $\div\ 0, \ell_1^2, \ell_2^2 \ldots \ell_{n-1}^2, a^2$

2. Аналогично, за конус, разделен на равни обеми с успоредни сечения. Тук кубовете на отделните радиуси на сеченията образуват аритметична прогресия.

$\ell_n = \sqrt[3]{\frac{\ell_{n-1}^3 + \ell_{n+1}^3}{2}}$ (Ако сечението е само едно, то $\ell = r\sqrt[3]{0,5}$)

и следва: $\div\ 0, \ell_1^3, \ell_2^3 \ldots \ell_{n-1}^3, r^3$

1а) частен случай – трапец с основи a и b

$\div$ е: $b^2, \ell_1^2, \ell_2^2 \ldots \ell_{n-1}^2, a^2$

2а) частен случай – пресечен конус

Имаме: $r^3, \ell_1^3 \dots \ell_{n-1}^3, R^3$

Друг вариант:

1) ако триъгълникът се дели на части с еднаква височина, то $\frac{F_1}{F} = \frac{1}{n^2}$ (тук F_1 е отсечената част откъм върха, а F - цялото лице)

и $\frac{F_m}{F} = \frac{2m-1}{n^2}$

2) за конус - части с еднаква височина:

$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{n^3}$ и $\frac{V_m}{V} = \frac{3m^2-3m+1}{m^3}$

XXV За сумите на първите n-числа в различни степени.

Общият вид на сумите е: $\sum\limits_{n=1}^{n} n^p$. Те могат да се представят в следния вид:

$$\sum_{n=1}^{n} n^1 = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^3 = \frac{6n^4+12n^3+6n^2}{24} \quad \left[= \left(\sum_{n=1}^{n} n^2\right)^2\right]$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^4 = \frac{24n^5 + 60n^4 + 40n^3 - 4n}{120}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^5 = \frac{120n^6 + 360n^5 + 300n^4 - 60n^2}{720}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^6 = \frac{720n^7 + 2520n^6 + 2520n^5 - 840n^3 + 120n}{5040}$$

(до тук сумите са изведени самостоятелно)

Могат да се направят следните изводи:

– сумата на коефициентите в числителя е равна на знаменателя, който е $(p+1)!$

– първият член на числителя е равен на знаменателя на предишния ред и е $p!\,n^{p+1}$

– вторият член е $\frac{(p+1)!}{2} n^p$

– първата формула е с 2 члена, II и III с по 3, IV и V – с по 4 и т.н. Така че, имаме:

ℓ (бр. членове) $= \frac{p+2}{2}$ за p – четно число и $\frac{p+1}{2}$ – за нечетно. (Тези 2 формули определят и болшинството при p гласували).

XXVI За „великата" теорема на Ферма

Теоремата гласи, че уравнението $x^n+y^n=z^n$ няма цялочислени решения за $n>2$

Тук се предлага една геометрична интерпретация на задачата. При приети x и y цели числа, следва да се докаже, че z не може да е цяло число за $n>2$. Ако се разгледа триъгълник със страни x, y и z, то имаме:

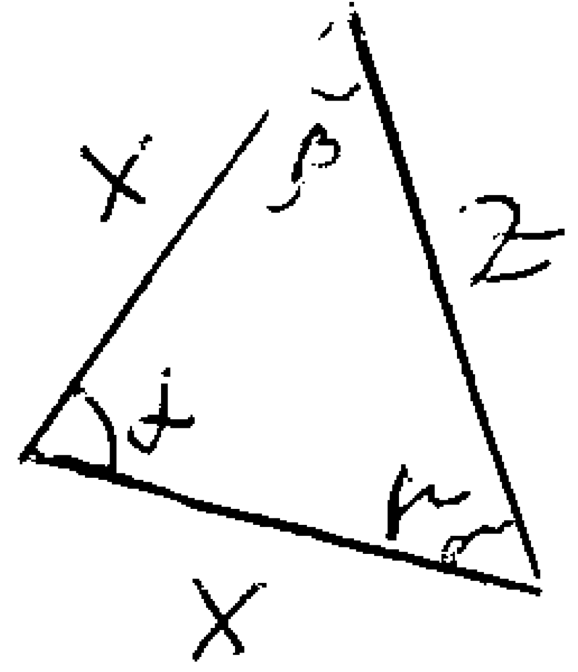
при $n=1 \rightarrow z=x+y$ и $\alpha=180°$

при $n=2 \rightarrow z^2=x^2+y^2$ (Питагорова теорема) и $\alpha=90°$

при $n>2$

а) първи случай $x=y$. Тогава имаме:

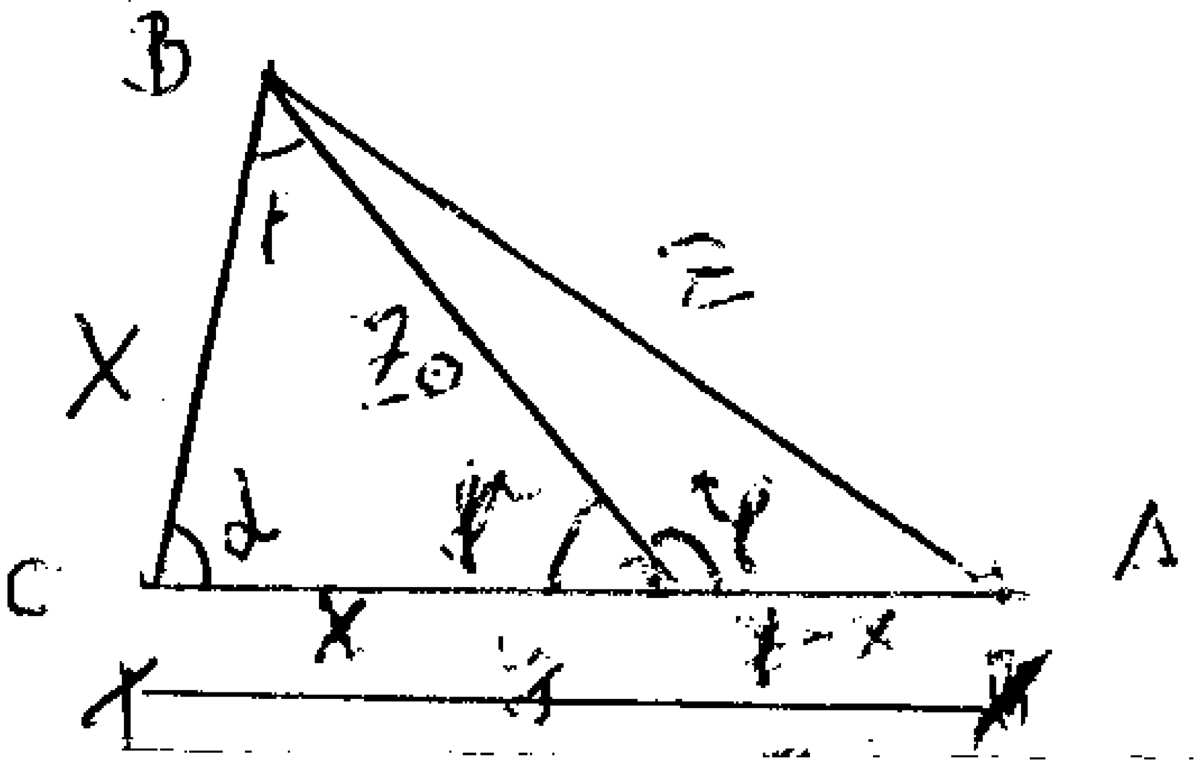
$2x^n=z^n$ и $z=x\sqrt[n]{2}$. Тук $\sqrt[n]{2}$ не е цяло число за никое n, следователно x, y и z не могат да са цели числа едновременно.



I случай

б) втори случай. Прието $y>x$

Тук, при $n>2$ имаме $60°<\alpha<90°$, като α не може да взема граничните стойности, тъй като неравенството



II случай

$Z > y > x$, при $n \Rightarrow \infty$ дава $\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)\right)^n = \left(\frac{Z}{x}\right)^n$;

$y \to Z$, тъй като $\frac{y}{x}$ и $\frac{Z}{x} > 1$. Тогава

$\angle\alpha \Rightarrow \angle\beta$, като и двата са $< 60°$, иначе триъгълникът става равностранен, (а $y > x$!)

И така, при II случай $Z_0 = x\sqrt[n]{2}$ и

$$Z = \sqrt{Z_0^2 + (y-x)^2 - 2Z_0(y-x).\cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{x^2 \cdot 2^{2/n} + (y-x)^2 - 2x \cdot 2^{1/n}(y-x).\cos\varphi} \quad *)$$

За да може Z да е цяло число при x и y - цели, трябва, но не е достатъчно, подкоренната величина на $*)$ да е цяло число - и да е точен корен.

Следва анализ на различните варианти-

(Тук $\varphi = \alpha + \beta$); $\beta = \gamma = \frac{180 - \alpha}{2}$

Щом x и y са цели числа, то за ф-ла $*)$ следва:

1) $\cos\varphi$ е рационално число, тогава $*)$ има вид:

$$Z = \sqrt{K_1 \cdot 2^{2/n} + K_2 - K_3 \cdot 2^{1/n}}$$ където K_i са рационални коефициенти. Заради $2^{1/n}$ (и $2^{2/n}$) ирационални за $n > 2$, следва че Z не може да бъде цяло число.

2) $\cos\varphi$ е ирационално число, тогава φ може да е и рационално, и ирационално число.

2.1) φ е рационално число, тогава и α, β и γ са рационални числа. Но тъй като α е в пределите $60^\circ < \alpha < 90^\circ$, без граничните стойности то $\cos\alpha$ не може да е рационално число и тогава, от $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\alpha}$ следва, че подкоренната величина, а също и z не могат да са цяло число.

2.2. Втъкът φ е ирационално число. Тогава β и γ също са ирационални ($\gamma + \varphi = 180^\circ$). В този случай α може да е:

а) рационално число, тогава преминаваме към случай 2.1

б) ирационално число, тогава имаме случай сума от 2 ирационални стойности $\to 2^{1/n}$ (или $2^{2/n}$) и $\cos\varphi$. Такава сума не може да даде рационално число.

В заключение може да се предположи, че представените геометрични разсъждения показват невъзможността x, y и z да са едновременно цели числа (при x и y - цели!) в равенството $x^n + y^n = z^n$ $(n > 2)$

1992 г.

<u>Допълнение</u>: ако $a^n + b^n = c^n$, то

1) $a^{n+1} + b^{n+1} < c^{n+1}$ и

2) $a^{n-1} + b^{n-1} > c^{n-1}$

Доказателство на 1): Условието е: $c > b > a$

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \overset{?}{<} \left(\frac{c}{a}\right)^{n+1}$$

(Вадим II от I у-ние)

$$- \quad 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \left(\frac{c}{a}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \overset{?}{<} \left(\frac{c}{a}\right)^{n+1} - \left(\frac{c}{a}\right)^{n}$$; делим на a^{n+1}

$b^n(b-a) < c^n(c-a)$. Неравенството е вярно, тъй като $c > b$ и също $c - a > b - a$

Доказателство на 2)

$$a^{n-1} + b^{n-1} - c^{n-1} = \frac{a^n}{a} + \frac{b^n}{b} - \frac{a^n + b^n}{c} =$$

$$= a^n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + b^n\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) > 0,$$

тъй като a^n и $b^n > 0$, а също така

$$\frac{c-a}{ac} \text{ и } \frac{c-b}{bc} \text{ са } > 0$$

3) Когато сумите са повече от 1, е възможно всичките числа да са цели (за разлика от т. Ферма)

Например: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ $(= 216)$

XXVII Варианти на Хероновата формула

1. ако страните на триъгълник образуват аритметична прогресия: a; $a+d$ и $a+2d$, то трябва да е налице: $a > d > 0$
Тогава лицето на триъгълника S е:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{a^4 + 2a^2d^2 + 4a^3d - 4ad^3 - 3d^4}$$

2. ако страните на триъгълник образуват геометрична прогресия: a, aq и aq^2, то трябва: $a > 0$ и $R\left(=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) > q > R-1 \left(=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, т.е q да е между двете главни стойности на З. с.

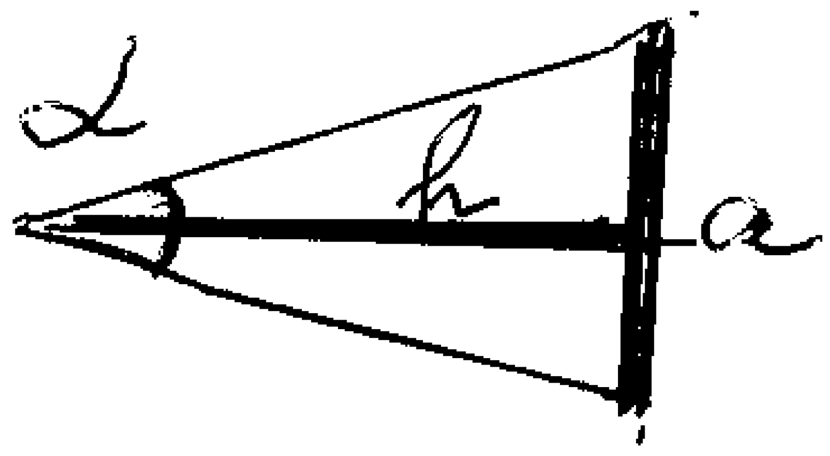
$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}$$

XXVIII За степените на свобода в n-мерно пространство

При 0-мерно пространство (точка) транслационните степени на свобода m_1 и ротационните m_2 са равни на нула. Общите степени $m_1 + m_2 = p$ — също. При 1-мерно пространство (права $m_1 = 1$; $m_2 = 0$ и $p = 1$. При 2-мерно пространство (равнина) $m_1 = 2$; $m_2 = 1$ и $p = 3$. При 3-мерно (обемно) пространство $m_1 = 3$; $m_2 = 3$ и $p = 6$. Следователно, за n-мерно пространство: $m_1 = n$; $m_2 = \frac{(n-1)n}{2}$ и $p = \frac{n(n+1)}{2}$

XXIX Идея за тригонометрична функция, която най-естествено да характеризира големината на ъгъла α.

Такава функция $\varphi(\alpha)$ може да бъде отношението $\frac{a}{h}$ (a е основа на равнобедрен триъгълник)



Връзките на $\varphi(\alpha)$ с $\sin\alpha$ и $tg\,\alpha$ са:

$$\varphi(\alpha) = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2} \quad и \quad \varphi(\alpha) = 2\,tg\frac{\alpha}{2}$$

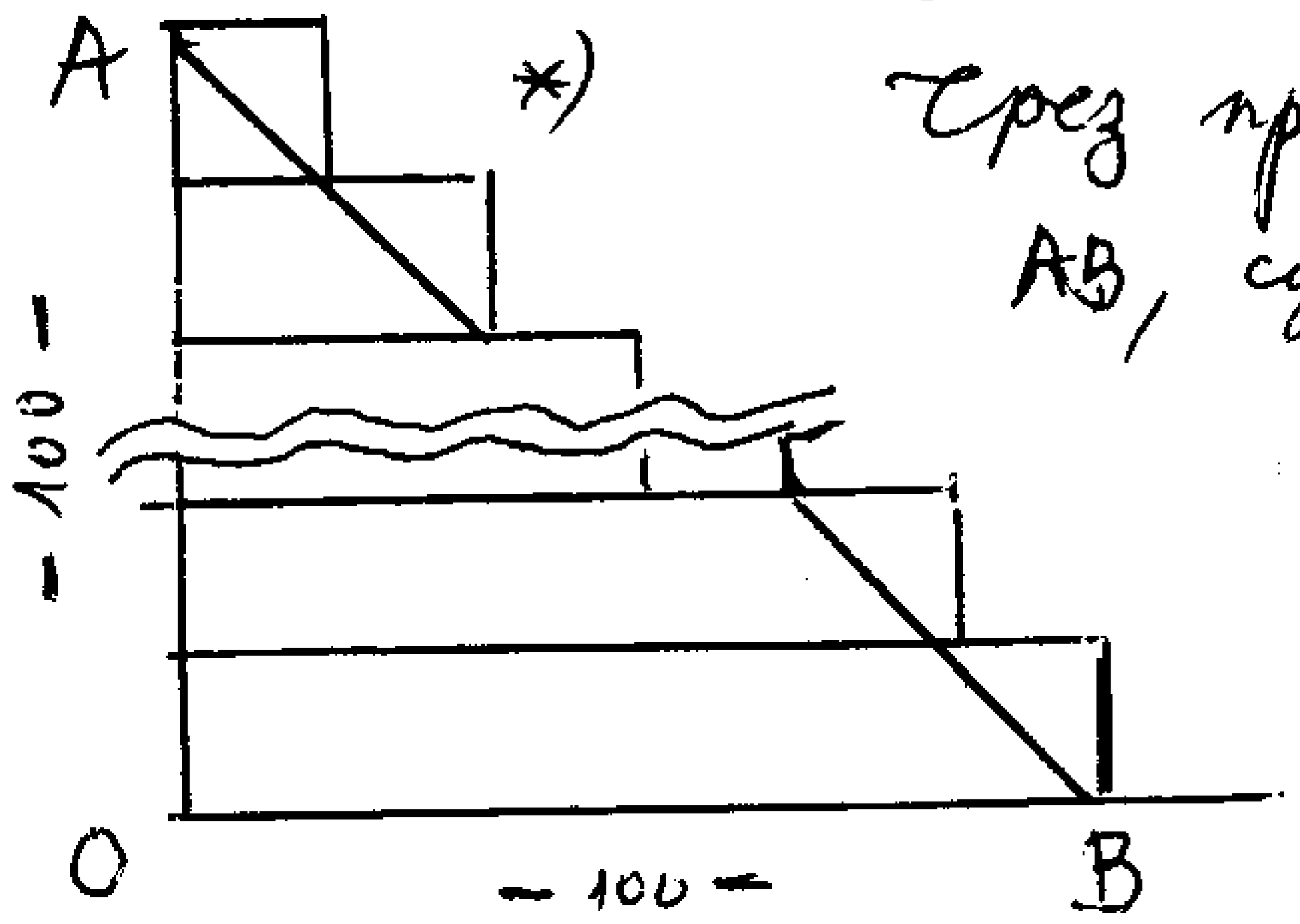
Ето съпоставката на 3-те функции за най-ключовите стойности на α:

α	$0°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0
$tg\,\alpha$	0	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0
$\varphi(\alpha)$	0	$2\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}$	∞

Забележка: За разлика от другите тригонометрични функции, $\varphi(\alpha)$ расте еднопосочно в интервала за α $0 \div 180°$

XXX За сумата от първите 100 числа

Както е известно, като ученик Гаус е намерил лесно и бързо сумата на числата от 1 до 100, като е съобразил, че тя е 50 пъти сумата на равноотдалечените членове от центъра, т.е $50.101=5050$. Тук се дава също лесен и бърз геометричен начин за същото. Исканата сума е сумата от всички квадратчета със страна и лице $=1$, в схемата: *). Очевидно сумата е площта на всичките квадратчета (или на броя им). Чрез прекарване на общия диагонал AB, сумата от лицата е:



$$\frac{100.100}{2}+100.0,5=5000+50.=5050$$

В общия случай за n члена, имаме: $\frac{n^2}{2}+0,5n=\frac{n(n+1)}{2}$