

НАДЕЖДНОСТ НА ГАЗОСНАБДИТЕЛНИ СИСТЕМИ

4. Приложение на статистически методи при обработка на данни

1

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Области на изменение на променливите
 - Единична стойност, при която различни източници дават идентични резултати за променливата
 - Две стойности, които определят област на изменение. В някои случаи областта се изменя с порядък и в този случай трябва да се извърши инженерна преценка при избора на стойност. Тази преценка се извършва като се вземе под внимание размерът и приложението на обекта.
 - Три стойности, които определят област. Това предполага, че има достатъчно данни, които се различават с повече от порядък. Причината е, че някои от данните се отнасят за катастрофални повреди, докато други включват намалени повреди вследствие извършена работа или малки дефекти, открити по време на текуща поддръжка.

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Използване на областите на изменение на променливите
 - Когато областта се състои от единична стойност, се използва без нужда от допълнителна преценка, освен ако няма никакви специфични обстоятелства за определяне на по-оптимистична или по-песимистична стойност.
 - Две или три стойности: При липса на специфична причина за предпочитание към екстремна стойност, се предпочита преобладаващата стойност
 - При широк обхват при отношение по-голямо от 10:1 се използва средно геометрично по следната причина: Използването на средно аритметично не е удачно за избор на представителна стойност, когато двете граници на изменение са широки, тъй като афинитетът е към по-голямото

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Средно аритметично

$$\sum_1^n \frac{\lambda_i}{n}$$

- Средно геометрично

$$\left(\prod_i^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n}$$

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Пример: При степен на повреда 0,1 и 1 (на 100 000 h)

- Средно аритметично

$$\sum_1^n \frac{\lambda_i}{n} = 0,55$$

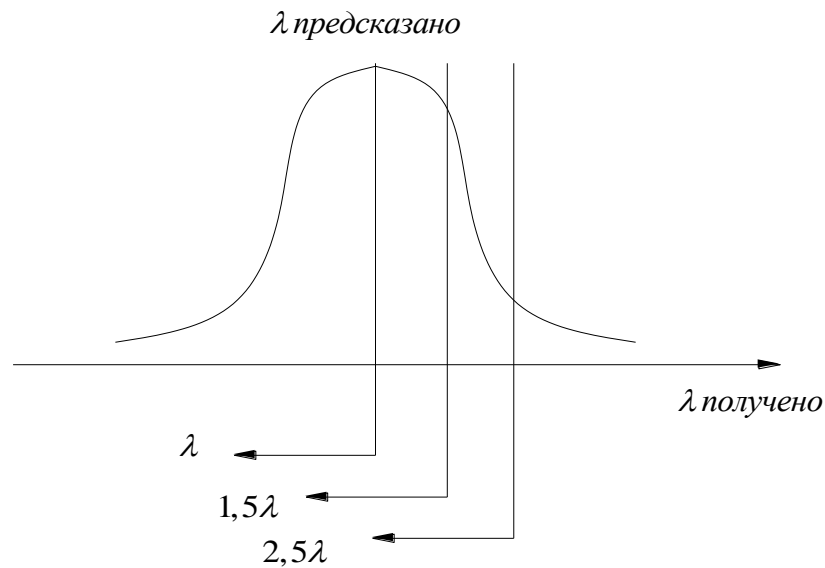
- Средно геометрично

$$\left(\prod_i^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = 0,316$$

- Ср. аритметичното е 5 пъти по-голямо от по-малката стойност и е половината от по-голямата стойност, затова е по-близо до по-голямата стойност
- Ср. геометричното е 0,316 и се свързва и с двете стойности чрез умножение с 3. Ср. геометричното има среден порядък

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Доверителни интервали
 - Отношението на предсказаната степен на повреда към измерената степен на повреда:



4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

Доверителен интервал	Евентуални измерени степени на повреда:
	по-добри от:
95%	3,5 x предсказаната
90%	2,5 x предсказаната
60%	1,5 x предсказаната
90%	измерените данни ще са в областта 3,5:1 до 2,86:1

- Източник: данни от газови компании, специфични данни от индустрията

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

○ Смесени доверителни интервали:

- При два различни източника на информация
- Област: R_S и R_I

- $$\frac{(\sum \lambda_S \cdot R_S) + (\sum \lambda_I \cdot R_I)}{\sum \lambda_S + \sum \lambda_I}$$

- ,където $\sum \lambda_S$ и $\sum \lambda_I$ са общите степени на повреда на първия и втория източник
- Пример: 3,5:1 и 8:1 с 90% доверителен интервал

$$\sum \lambda_S = 20 (\text{на } 10^6 \text{ h}) \text{ и } \sum \lambda_I = 100 (\text{на } 10^6 \text{ h})$$

$$\frac{(20 \cdot 3,5) + (100 \cdot 8)}{120} = 7,25 : 1$$

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Използването на регресионния анализ налага прецизно определяне на параметъра степен на повреда
- Степента на повреда дава ефект на системно ниво. Не се изчерпва напълно с повредата на отделен компонент

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Интерпретиране на данни и демонстриране на надеждност
- Разглеждат се четири случая:

	Постоянна степен на повреда	Променлива степен на повреда
Малко повреди	Статистическа интерпретация	Неадекватни данни
Много повреди	$\lambda = k/T$	Използване на вероятности

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- При постоянна степен на повреда:

- При k – голямо (напр. >10) неточността в набирането на данни от извадката може да се пренебрегне

- $\lambda = \frac{k}{T}$

- $\theta = \frac{T}{k}$

- Когато k е малко (дори 0) се използва статистическа интерпретация на данните

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

○ Дисперсия и доверително ниво

- Концепция за точкова степен на повреда или точково средно време между повреди
- При повторение на тестовете може да се получи друго T/k и ако имаме известен брой, следователно получаваме определен брой стойности за MTBF
- Това определяне е в резултат на извадка и стойностите са точкови $\hat{\theta}$ и $\hat{\lambda}$

- $$MTBF = \theta = \int_0^{\infty} \frac{N_s(t) dt}{N}$$

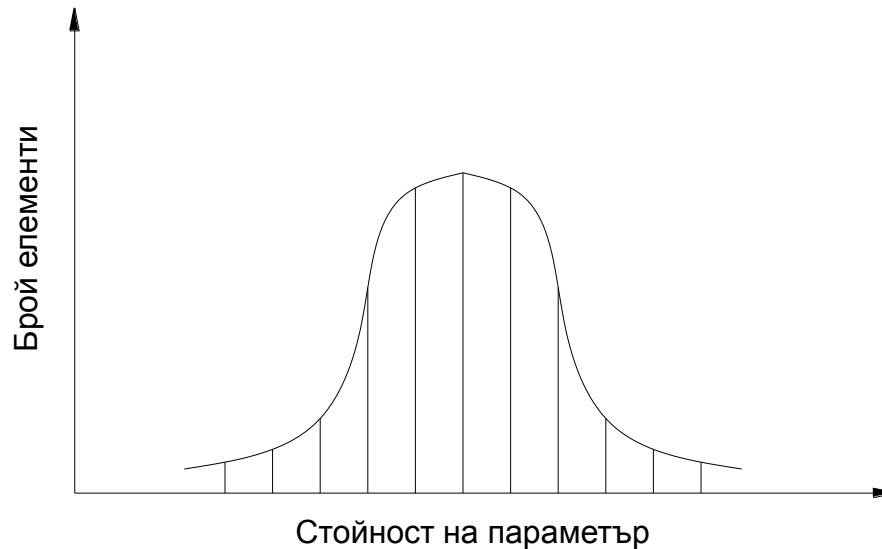
- Всички елементи трябва да се повредят, за да се определи истинското MTBF

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Статистическа извадка и доверително ниво
 - На практика трябва да се извършват тестове, които завършват след определен брой часове или повреди
 - Прави се заключение относно MTBF или степента на повреда
 - В случаи на много висока надеждност времето, което е необходимо ще бъде нереалистично
 - Процеса на извеждане на заключение за популация от елементи, базирано върху данни от извадка е познато като статистическа извадка
 - При статистическата извадка се избира математическо разпределение, което най-добре пасва на данните

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Статистическа извадка и доверителен интервал



- При статистическата извадка се избира математическо разпределение, което най-добре пасва на данните

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Хи-квадрат критерии χ^2
 - Важна задача на статистическия анализ е да даде количествена и качествена характеристика на проявлението на връзките и взаимозависимостите между явленията при конкретните условия и в определени пространствено-времеви граници.
 - Изучаването на връзките и зависимостите дава възможност да се опознаят закономерностите на развитието на явленията и процесите, да се измери влиянието на факторите, влияещи върху тях и да се подредят те по степента на тяхната важност.
 - Почти всички изводи и заключения, основани на експериментални проучвания и обработка на масови статистически данни, получават обществено признание и оценка, само ако са били подложени на статистическа проверка на хипотези и успешно са я издържали.

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Хи-квадрат критерии χ^2
 - Статистическата хипотеза представлява предположение, отнасящо се до някаква функция на честотите на наблюдаеми случайни променливи.
 - При всяка проверка на хипотези се осъществява реален процес на научно познание без оглед на постигнатите крайни резултати и на сигурността на изводите и заключенията при този процес.
 - Проверката на статистически хипотези с параметрични методи, изисква да се познава или да бъде направено достатъчно обосновано предположение за характера на разпределението в генералната съвкупност, от която са излъчени извадките.
 - В редица случаи емпиричното разпределение силно се отклонява от теоретичното нормално разпределение и следователно, приложението на параметричните методи е неправомерно.

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

○ Хи-квадрат критерии χ^2

- При експерименталните изследвания най-често характерът на емпиричното разпределение може да се определи едва след провеждане на изследването.
- В тези ситуации приложението на непараметричните методи за проверка на хипотези е напълно правомерно, но те са по-малко мощни от параметричните.
- Непараметричните методи имат няколко преимущества пред параметричните, които могат да се разглеждат и като техни основни характеристики:
 1. Независимост от формата на разпределение;
 2. Неограниченост от скалата и точността на измерване на резултатите;
 3. При ограничен обем на извадката, непараметричните методи позволяват да се направят, макар и ориентировъчно, изводи от проверката на хипотези;
 4. Изчислителните процедури са значително по-леки и нетрудоемки;

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Хи-квадрат критерии χ^2
 - Методът Хи-квадрат, разработен от английския статистик К. Пирсън е един от най-популярните непараметрични методи за проверка на статистически хипотези при изучаване на неметрирани/качествени/ признаци. Главната особеност на метода се изразява в това, че с него се изследват разликите в разпределението на два вида честоти – фактически и очаквани/теоретични/.
 - С него освен това се проверява хипотезата за съвпадение на емпирично с определен модел теоретично разпределение /номинално, биноминално и т.н./ . В този случай критерият е известен като критерий за съгласуваност на емпирично с теоретично разпределение.
- Приложението на метода минава през етапите за проверка на статистически хипотези:
- Дефиниране на нулевата и алтернативната хипотеза.
- Определяне равнище на значимост α ;
- Избор на метод за проверка на хипотезата;
- Определяне характера на критичната област;
- Осигуряване на необходимите данни за проверка;
- Оценка на емпиричната характеристика;
- Определяне на теоретичната характеристика;
- Вземане на решението.

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Хи-квадрат критерии χ^2
 - Хи-квадрат критерия има само положителни стойности и те зависят само от степените на свобода, което е едно от най-важните свойства на χ^2 разпределението.
 - Методът може да бъде използван и при интервалното скалиране и скалата на отношенията за проверка на съвпадението между емпирично и определен модел на теоретично разпределение/нормално, биномиално, поасоново и т.н./.
- Този метод показва:
- Само дали съществува дадена предполагаема връзка, но не може да даде отговор на въпроса дали тя е от причинно следствен или има друг характер.
- При практическото провеждане на χ квадрат метод винаги съществува възможност една връзка да се докаже като обективно съществуваща колкото и слаба да е тя.
- Изходните данни за анализа трябва да бъдат събрани чрез представителна извадка.
- Метод е приложим само в случаите когато общият брой на изследваните случаи е не по малко от 50 и когато теоретично очакваният брой случаи в отделните клетки на таблицата е не по-малък от 5.

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- За MTBF е възможно да се приложи същата техника за определяне заедно с доверителен интервал, ако е познато разпределението на величината
- Разглеждат се случайни величини

- Изразът $\frac{2.k.\hat{\theta}}{\theta}$ има Хи-квадрат разпределение с $2.k$ степени на свобода, където тестът е прекъснат при k -тата повреда

- $$\hat{\theta} = \frac{T}{k} = \frac{2.k.\hat{\theta}}{\theta} = \frac{2.k.T}{k.\theta} = \frac{2.T}{\theta}$$

- $\Rightarrow \frac{2.T}{\theta}$ е Хи-квадрат разпределено

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

○ Едностраниен доверителен интервал

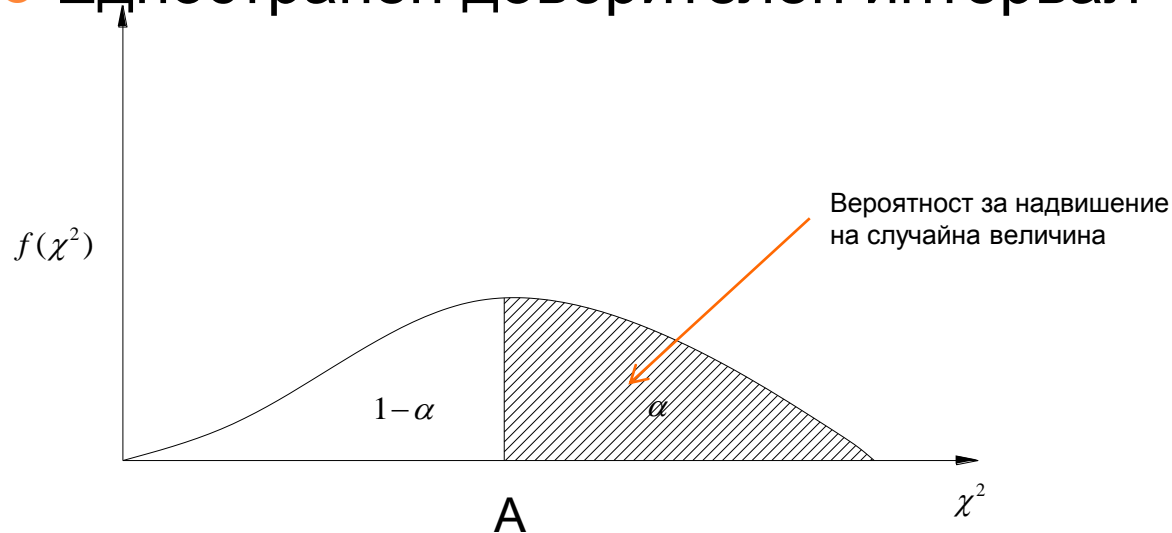


○ за да се определи стойността на Хи-квадрат е необходимо да се определят два параметъра:

- Брой степени на свобода (=2.брой повреди)
- Доверителен интервал
- Ако доверителният интервал е 60%, долната граница ще бъде стойност, при която MTBF надвишава 6 от 10 пъти
- Ниво на значимост $\alpha = (1-0,6)=0,4$

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Едностраниен доверителен интервал



- От $\frac{2.T}{\chi^2}$ може да се определи параметъра MTBF при 60%

доверителен интервал. С други думи това представлява такава стойност на MTBF или по-добра, която ще бъде наблюдавана в 60% от времето. Означава се с $\theta_{60\%}$

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Пример: В тест с подмяна на елементи (всеки повреден елемент се подменя) 100 елемента се тестват 1000 h и теста се преустановява. Да се изчисли MTBF за 90% и 60% доверителни интервали.
 - 1. Тъй като е тест с подмяна T се получава от бр. тествани елементи x линейни тестово време, затова $T=100\ 000\ h$ и $k=3$
 - Степени на свобода $n=2.k=6$
 - За 90% доверителен интервал $\alpha = (1-0,9)=0,1$
 - За 60% доверителен интервал $\alpha = (1-0,6)=0,4$
 - Отчита се χ_{α}^2 - 10,6 и 6,21
 - $\theta_{90\%} = 2.100000 / 10,6 = 18900\ h$
 - $\theta_{60\%} = 2.100000 / 6,21 = 32\ 200\ h$



4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Пример: В тест с подмяна на елементи (всеки повреден елемент се подменя) 100 елемента се тестват 1000 h и теста се преустановява. Да се изчисли MTBF за 90% и 60% доверителни интервали.
 - В сравнение с точково определяне $T/k=100\ 000/3=33\ 333\ h$
 - $$\chi^2 = \frac{2.T}{\theta} = 200000 / 33333 = 6$$
 - За $n=6$ се отчита от таблица α малко по-голямо от 0,4
 - По тази причина доверителният интервал е по-малък от 60%
 - В горният пример тестът се преустановява при възникване на грешка.
 - За тест прекъснат по време трябва да се добави единица към броя на грешките. По този начин се отчита възможността, ако теста продължи още съвсем малко да се случи още една повреда

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Пример: 100 елемента 50 h без авария, 60%-тен доверителен интервал

- $$\theta_{60\%} = \frac{2.T}{\chi^2} = 2.50.100 / \chi^2$$

- За 60% доверителен интервал $\alpha = (1-0,6)=0,4$

- За $n=2.(k+1) = 2$

- Отчита се $\chi^2 = 1,83$

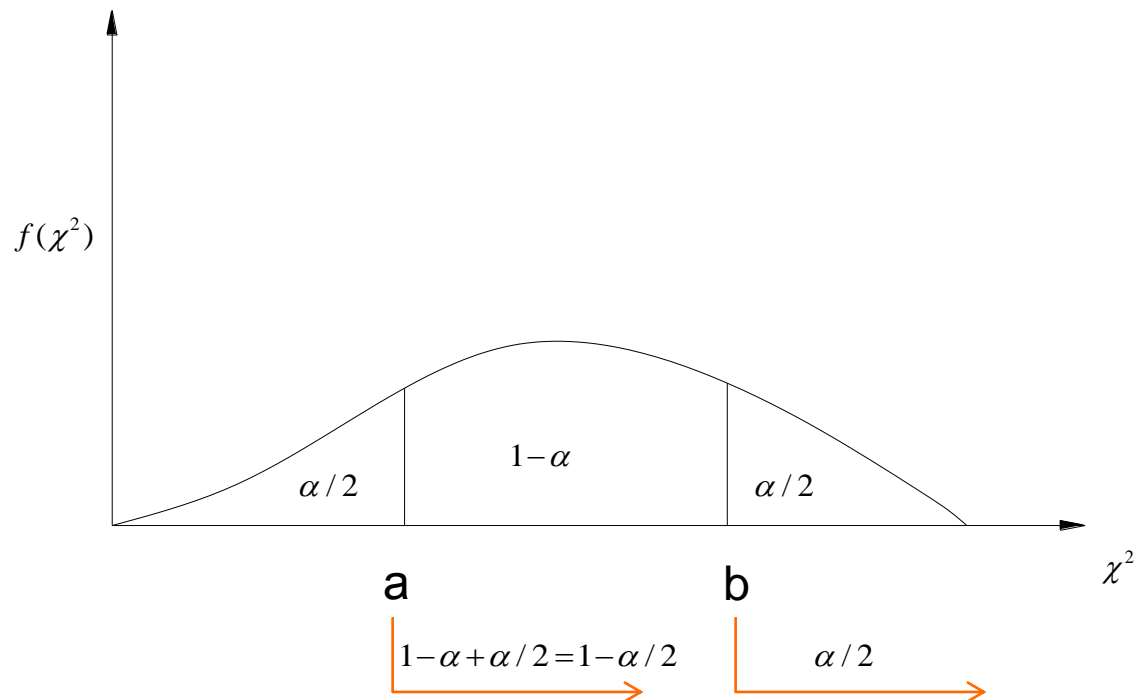
- $\theta = 100000 / 1,83 = 5464 h$

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Пример: 100 елемента 50 h без авария, 60%-тен доверителен интервал
 - Ако $MTBF = 20\ 000\ h$
 - $\chi^2 = \frac{2.T}{\theta} = 20000 / 20000 = 1$
 - При $\alpha = 0,6$
 - Доверителен интервал 40%

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Двоен доверителен интервал
 - Понякога се изисква МТВФ да се намира между две доверителни граници



4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

○ Двоен доверителен интервал

- χ^2 се отчита два пъти:
- $n=2.k$ и $1-\alpha/2$ – долна граница на χ^2
- $n=2.k$ ($2.k+2$ – за прекъснат по време тест) и $\alpha/2$ – горна граница на χ^2
- Горната граница на χ^2 съответства на долната граница на MTBF
- Вероятността χ^2 да излиза извън границите са площите в дясно от всяка граница

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

○ Двоен доверителен интервал

- Пример: Да се определи долната и горната граница на MTBF за 80% от времето попада в тези граници
- $T=100\ 000\text{h}$, $k=3$
- $n=6$, $\alpha =0,9$, $\chi^2 = 2,2$
- $n=8$, $\alpha =0,1$, $\chi^2 = 13,4$
- MTBF: 14 925² h и 90 909 h
- MTBF лежащо между тези две стойности има 80% доверителност

4. ОБРАБОТКА НА ДАННИ

- Обобщение на Хи-квадрат теста
 - Измерване на T (акумулирано тестово време) и k броя аварии
 - Избор на доверителен интервал и $\alpha=1$ -дов.
 - $n=2.k (2.k+2)$, за долното ниво MTBF в прекъснат по време тест
 - Отчитане на χ^2 от таблица
 - Нека MTBF при даден доверителен интервал да бъде $2.T / \chi^2$
 - За двустранни граници се използва горната процедура два пъти

Таблица ВЗ. ГОРНИ ПРОЦЕНТНИ ТОЧКИ НА НА ХИ-КВАДРАТ РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО

к*	НИВО НА ЗНАЧИМОСТ**													
	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.00016	0.00063	0.00393	0.0158	0.0642	0.1485	0.4549	1.0742	1.6424	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349	10.8276
2	0.02010	0.04041	0.10259	0.2107	0.4463	0.7133	1.3863	2.4079	3.2189	4.6052	5.9915	7.8240	9.2103	13.8155
3	0.11483	0.18483	0.35185	0.5844	1.0052	1.4237	2.3660	3.6649	4.6416	6.2514	7.8147	9.8374	11.3449	16.2662
4	0.29711	0.42940	0.71072	1.0636	1.6488	2.1947	3.3567	4.8784	5.9886	7.7794	9.4877	11.6678	13.2767	18.4668
5	0.55430	0.75189	1.14548	1.6103	2.3425	2.9999	4.3515	6.0644	7.2893	9.2364	11.0705	13.3882	15.0863	20.5150
6	0.87209	1.13442	1.63538	2.2041	3.0701	3.8276	5.3481	7.2311	8.5581	10.6446	12.5916	15.0332	16.8119	22.4577
7	1.23904	1.56429	2.16735	2.8331	3.8223	4.6713	6.3458	8.3834	9.8032	12.0170	14.0671	16.6224	18.4753	24.3219
8	1.64650	2.03248	2.73264	3.4895	4.5936	5.5274	7.3441	9.5245	11.0301	13.3616	15.5073	18.1682	20.0902	26.1245
9	2.08790	2.53238	3.32511	4.1682	5.3801	6.3933	8.3428	10.6564	12.2421	14.6837	16.9190	19.6790	21.6660	27.8772
10	2.55821	3.05905	3.94030	4.8652	6.1791	7.2672	9.3418	11.7807	13.4420	15.9872	18.3070	21.1608	23.2093	29.5883
11	3.05348	3.60869	4.57481	5.5778	6.9887	8.1479	10.3410	12.8987	14.6314	17.2750	19.6751	22.6179	24.7250	31.2641
12	3.57057	4.17829	5.22603	6.3038	7.8073	9.0343	11.3403	14.0111	15.8120	18.5493	21.0261	24.0540	26.2170	32.9095
13	4.10692	4.76545	5.89186	7.0415	8.6339	9.9257	12.3398	15.1187	16.9848	19.8119	22.3620	25.4715	27.6882	34.5282
14	4.66043	5.36820	6.57063	7.7895	9.4673	10.8215	13.3393	16.2221	18.1508	21.0641	23.6848	26.8728	29.1412	36.1233
15	5.22935	5.98492	7.26094	8.5468	10.3070	11.7212	14.3389	17.3217	19.3107	22.3071	24.9958	28.2595	30.5779	37.6973
16	5.81221	6.61424	7.96165	9.3122	11.1521	12.6243	15.3385	18.4179	20.4651	23.5418	26.2962	29.6332	31.9999	39.2524
17	6.40776	7.25500	8.67176	10.0852	12.0023	13.5307	16.3382	19.5110	21.6146	24.7690	27.5871	30.9950	33.4087	40.7902
18	7.01491	7.90622	9.39046	10.8649	12.8570	14.4399	17.3379	20.6014	22.7595	25.9894	28.8693	32.3462	34.8053	42.3124
19	7.63273	8.56704	10.11701	11.6509	13.7158	15.3517	18.3377	21.6891	23.9004	27.2036	30.1435	33.6874	36.1909	43.8202
20	8.26040	9.23670	10.85081	12.4426	14.5784	16.2659	19.3374	22.7745	25.0375	28.4120	31.4104	35.0196	37.5662	45.3147
21	8.89720	9.91456	11.59131	13.2396	15.4446	17.1823	20.3372	23.8578	26.1711	29.6151	32.6706	36.3434	38.9322	46.7970
22	9.54249	10.60003	12.33801	14.0415	16.3140	18.1007	21.3370	24.9390	27.3015	30.8133	33.9244	37.6595	40.2894	48.2679
23	10.19572	11.29260	13.09501	14.8480	17.1865	19.0211	22.3369	26.0184	28.4288	32.0069	35.1725	38.9683	41.6384	49.7282
24	10.85636	11.99182	13.84843	15.6587	18.0618	19.9432	23.3367	27.0960	29.5533	33.1962	36.4150	40.2704	42.9798	51.1786
25	11.52398	12.69727	14.61141	16.4734	18.9398	20.8670	24.3366	28.1719	30.6752	34.3816	37.6525	41.5661	44.3141	52.6197
26	12.19815	13.40858	15.37916	17.2919	19.8202	21.7924	25.3365	29.2463	31.7946	35.5632	38.8851	42.8558	45.6417	54.0520
27	12.87850	14.12542	16.15140	18.1139	20.7030	22.7192	26.3363	30.3193	32.9117	36.7412	40.1133	44.1400	46.9629	55.4760
28	13.56471	14.84748	16.92788	18.9392	21.5880	23.6475	27.3362	31.3909	34.0266	37.9159	41.3371	45.4188	48.2782	56.8923
29	14.25645	15.57448	17.70837	19.7677	22.4751	24.5770	28.3361	32.4612	35.1394	39.0875	42.5570	46.6927	49.5879	58.3012
30	14.95346	16.30617	18.49266	20.5992	23.3641	25.5078	29.3360	33.5302	36.2502	40.2560	43.7730	47.9618	50.8922	59.7031
31	15.65546	17.04232	19.28057	21.4336	24.2551	26.4397	30.3359	34.5981	37.3591	41.4217	44.9853	49.2264	52.1914	61.0983
32	16.36222	17.78271	20.07191	22.2706	25.1478	27.3728	31.3359	35.6649	38.4663	42.5847	46.1943	50.4867	53.4858	62.4872
33	17.07351	18.52714	20.86653	23.1102	26.0422	28.3069	32.3358	36.7307	39.5718	43.7452	47.3999	51.7429	54.7755	63.8701
34	17.78915	19.27544	21.66428	23.9523	26.9383	29.2421	33.3357	37.7954	40.6756	44.9032	48.6024	52.9952	56.0609	65.2472
35	18.50893	20.02743	22.46502	24.7967	27.8359	30.1782	34.3356	38.8591	41.7780	46.0588	49.8018	54.2438	57.3421	66.6188
36	19.23268	20.78294	23.26861	25.6433	28.7350	31.1152	35.3356	39.9220	42.8788	47.2122	50.9985	55.4889	58.6192	67.9852
37	19.96023	21.54185	24.07494	26.4921	29.6355	32.0532	36.3355	40.9839	43.9782	48.3634	52.1923	56.7305	59.8925	69.3465
38	20.69144	22.30401	24.88390	27.3430	30.5373	32.9919	37.3355	42.0451	45.0763	49.5126	53.3835	57.9688	61.1621	70.7029
39	21.42616	23.06929	25.69539	28.1958	31.4405	33.9315	38.3354	43.1053	46.1730	50.6598	54.5722	59.2040	62.4281	72.0547
40	22.16426	23.83757	26.50930	29.0505	32.3450	34.8719	39.3353	44.1649	47.2685	51.8051	55.7585	60.4361	63.6907	73.4020

Таблица ВЗ. ГОРНИ ПРОЦЕНТНИ ТОЧКИ НА НА ХИ-КВАДРАТ РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО

K*	НИВО НА ЗНАЧИМОСТ**(α)														
	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	
41	22.90561	24.60875	27.32555	29.9071	33.2506	35.8131	40.3353	45.2236	48.3628	52.9485	56.9424	61.6654	64.9501	74.7449	
42	23.65009	25.38271	28.14405	30.7654	34.1574	36.7550	41.3352	46.2817	49.4560	54.0902	58.1240	62.8918	66.2062	76.0838	
43	24.39760	26.15935	28.96472	31.6255	35.0653	37.6975	42.3352	47.3390	50.5480	55.2302	59.3035	64.1155	67.4593	77.4186	
44	25.14803	26.93859	29.78748	32.4871	35.9743	38.6408	43.3352	48.3957	51.6389	56.3685	60.4809	65.3367	68.7095	78.7495	
45	25.90127	27.72034	30.61226	33.3504	36.8844	39.5847	44.3351	49.4517	52.7288	57.5053	61.6562	66.5553	69.9568	80.0767	
46	26.65724	28.50450	31.43900	34.2152	37.7955	40.5292	45.3351	50.5071	53.8177	58.6405	62.8296	67.7714	71.2014	81.4003	
47	27.41585	29.29101	32.26762	35.0814	38.7075	41.4744	46.3350	51.5619	54.9056	59.7743	64.0011	68.9852	72.4433	82.7204	
48	28.17701	30.07979	33.09808	35.9491	39.6205	42.4201	47.3350	52.6161	55.9926	60.9066	65.1708	70.1968	73.6826	84.0371	
49	28.94065	30.87076	33.93031	36.8182	40.5344	43.3664	48.3350	53.6697	57.0786	62.0375	66.3386	71.4061	74.9195	85.3506	
50	29.70668	31.66386	34.76425	37.6886	41.4492	44.3133	49.3349	54.7228	58.1638	63.1671	67.5048	72.6133	76.1539	86.6608	
51	30.47505	32.45903	35.59986	38.5604	42.3649	45.2607	50.3349	55.7753	59.2481	64.2954	68.6693	73.8183	77.3860	87.9680	
52	31.24567	33.25621	36.43709	39.4334	43.2814	46.2086	51.3349	56.8274	60.3316	65.4224	69.8322	75.0214	78.6158	89.2722	
53	32.01849	34.05533	37.27589	40.3076	44.1987	47.1571	52.3348	57.8789	61.4142	66.5482	70.9935	76.2226	79.8433	90.5734	
54	32.79345	34.85635	38.11622	41.1830	45.1167	48.1060	53.3348	58.9299	62.4961	67.6728	72.1532	77.4218	81.0688	91.8718	
55	33.57048	35.65921	38.95803	42.0596	46.0356	49.0554	54.3348	59.9805	63.5772	68.7962	73.3115	78.6191	82.2921	93.1675	
56	34.34952	36.46385	39.80128	42.9373	46.9552	50.0053	55.3348	61.0305	64.6576	69.9185	74.4683	79.8147	83.5134	94.4605	
57	35.13053	37.27024	40.64593	43.8161	47.8755	50.9556	56.3347	62.0802	65.7373	71.0397	75.6237	81.0085	84.7328	95.7510	
58	35.91346	38.07833	41.49195	44.6960	48.7965	51.9063	57.3347	63.1294	66.8162	72.1598	76.7778	82.2007	85.9502	97.0388	
59	36.69825	38.88807	42.33931	45.5770	49.7182	52.8575	58.3347	64.1782	67.8945	73.2789	77.9305	83.3911	87.1657	98.3242	
60	37.48485	39.69942	43.18796	46.4589	50.6406	53.8091	59.3347	65.2265	68.9721	74.3970	79.0819	84.5799	88.3794	99.6072	

* K = степени на свобода. За K > 60 може да се използва апроксимационната формула: $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2K-1}$.

