РЕШЕНИЯ ВТОРИ ПРЕДВАРИТЕЛЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

УАСГ

27-ми Април 2014 г.

Вариант 2

Задача 1. (1 т.) Нека α и β са остри ъгли и $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\operatorname{tg}\beta = 3$. Сумата $\alpha + \beta$ е равна на:

а) -45°; б) 150°; в) 135°; г) 90°.

Решение: Отговорът е в). Тъи като $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2+3}{1-2.3} = -1$, то $\alpha + \beta = -45^\circ + 180^\circ k;\ \ k \in \mathbb{Z}$ и тъй като ъглите са остри, то сумата им е 135° (тук $\mathbb{Z}$ е множеството на целите числа).

Задача 2. (1 т.) Числата $a_1, a_2, \ldots$ образуват геометрична прогресия, при което $a_4 = 128$ и $a_7 = 16$. Първият член a_1 е равен на:

а) 32; б) 1024; в) -48; г) 128. **Отг.** 1024

Задача 3. (1 т.) **.** Стойността на израза $32^{\frac{3}{5}} - \sqrt[3]{125}$ е равна на:

а) 8; б) 5; в) -3; г) 3. **Отг.** 3.

Задача 4. (1 т.) Даден е правоъгълен триъгълник с дължини на катетите 3 и 4. Дължината на височината през правия ъгъл е равна на:

а) 2,4; б) 3; в)1,8; г) 2. **Отг.** 2,4$= \frac{12}{5} = \frac{3.4}{\sqrt{3^2+4^2}}$.

Задача 5. (1 т.) Всички ръбове на триъгълна пирамида са с дължина единица. Лицето S на пълната повърхнина и радиусът r на вписаната сфера на тази пирамида са равни съответно на:

а) S=3 и r=1 ; б) $S = \sqrt{3}$ и $r = \frac{\sqrt{6}}{12}$; в) $S = 2\sqrt{3}$ и $r = \frac{1}{2\sqrt{6}}$; г) $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$ и $r = \frac{1}{2}$.

Отг. $r=\dfrac{3V}{S}$, където V е обема, а S е лицето на пълната повърхнина. В нашия случай $S=4.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$, защото a=1. Единственият отговор с $S=\sqrt{3}$ е б). Проверете, че и обема е правилно записан (но това не е необходимо за да се признае правилен отговор на задачата).

Задача 6. Графиката на функцията $f(x)=4^x-2^{x+1}+a$ отсича от абсцисата Ox отсечка с дължина 1.

а)) (1,5 т.) Докажете, че $a=\dfrac{8}{9}$.

б) (1,5 т.)Докажете, че $f(x)\geq-\dfrac{1}{9}$ за всяко x.

в) (2 т.) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x)=0$, пресметнете стойността на израза $8^{x_1}+8^{x_2}$.

Решение: а) От условието следва, че уравнението $f(x)=0$ трябва да има 2 корена x_1 и x_2, като $x_2-x_1=1$. Полагаме $2^x=t$, тогава уравнението $t^2-2t+a=0$ има корени $t_1=2^{x_1}$ и $t_2=2^{x_2}$. От $x_2-x_1=1$ следва че $2^{x_2-x_1}=2$, от където получаваме $\dfrac{2^{x_2}}{2^{x_1}}=2;\ \dfrac{t_2}{t_1}=2$ и значи $t_2=2t_1$. От формулите на Виет имаме $t_1+t_2=2$ и от системата $\begin{cases} t_2=2t_1 \\ t_1+t_2=2 \end{cases}$ лесно се вижда, че $t_1=\dfrac{2}{3}$, $t_2=\dfrac{4}{3}$. Окончателно получаваме $a=t_1t_2=\dfrac{8}{9}$.

б) От $2^x=t$ следва че $t\in(0,\infty)$ и тъй като минимумът на $t^2-2t+\dfrac{8}{9}$ се достига при $t=1$, то минималната стойност на $f(x)$ е $1-2+\dfrac{8}{9}=-\dfrac{1}{9}$.

в) $8^{x_1}+8^{x_2}=t_1^3+t_2^3=(t_1+t_2)\left[(t_1+t_2)^2-3t_1t_2\right]=2\left(4-3\dfrac{8}{9}\right)=\dfrac{8}{3}$.

Задача 7. Основата AB на остроъгълния триъгълник ABC е диаметър на окръжност k, която пресича страните BC и AC съответно в точките M и N. Известно е, че $\dfrac{CM}{MB}=\dfrac{CN}{NA}=\mu$.

а) (1 т.) Докажете, че триъгълникът ABC е равнобедрен.

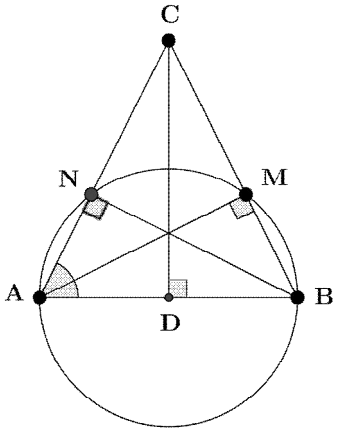
б) (2 т.) Изразете тангенса на ъгъла CAB при основата AB чрез μ.

в) (2 т.) Пресметнете лицето на ABC, ако AB=2 и μ=2.

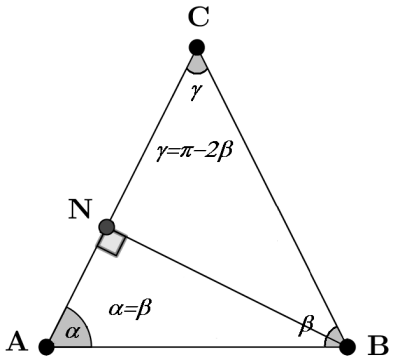
Решение: в) Предполагаме, че подусловията а) и б) са решени. Тогава от правоъгълния триъгълник ADC, в който AD=1, получаваме, че $\mathrm{tg}(\measuredangle \mathrm{CAD})=\mathrm{tg}\beta=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{CD}{1}$. От подусловие б) и от $\mu=2$ следва, че $\mathrm{tg}\beta=\sqrt{1+\mu^2}=\sqrt{5}=CD$. Значи $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB.CD=\dfrac{1}{2}.2.\sqrt{5}=\sqrt{5}$. Ще отбележим, че до

тук са спечелени две точки *дори и подусловията* а) и б) *да не са решени* в следващия текст. Разбира се, предлагаме решения и на останалите подусловия.

а) Достатъчно е да се поясни, че от теоремата на Талес следва, че $MN \parallel AB$. От друга страна, както се вижда на следващата рисунка M и N са пети на височините през A и B съответно (защо?). Значи $\triangle ABN \cong \triangle ABM$ - те са правоъгълни триъгълници с обща хипотенуза и равни височини. Очевидно от това следва, че $\triangle ABC$ е равнобедрен и $AC=BC$.



б) И така, $\triangle ABC$ е равнобедрен. Ще използваме стандартните означения; следващата рисунка пояснява ситуацията.



Да означим след това височината BN с h. От правоъгълните триъгълници ABN и BNC се получава, че $AN = h\operatorname{ctg}\alpha = h\operatorname{ctg}\beta$ и $CN = h\operatorname{ctg}\gamma = h\operatorname{ctg}(\pi\text{-}2\beta) = -h\operatorname{ctg}2\beta$. По условие $\frac{CN}{NA} = \mu$, значи $\mu = \frac{-h\operatorname{ctg}2\beta}{h\operatorname{ctg}\beta} = -\frac{\operatorname{ctg}2\beta}{\operatorname{ctg}\beta}$. Тъй като $\operatorname{ctg}2\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}2\beta} = \frac{1}{\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{2\operatorname{tg}\beta}$

(това го има във всеки справочник с формули), то

$-\frac{\operatorname{ctg}2\beta}{\operatorname{ctg}\beta} = -\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{2\operatorname{tg}\beta} = -\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{2}$ и значи $\mu = -\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{1+2\mu}$.

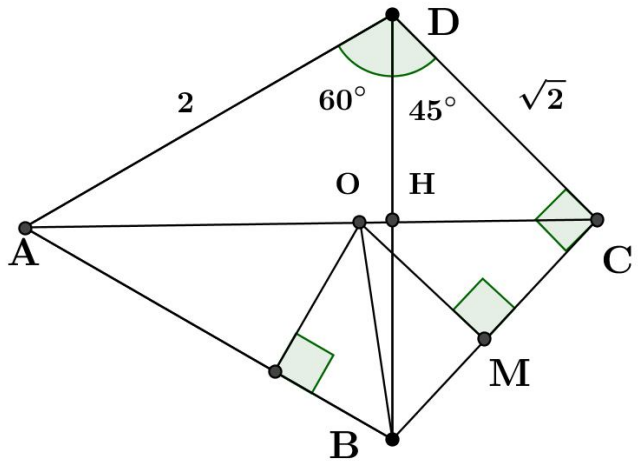
Задача 8. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDF$ с връх F. Триъгълникът ABD е равностранен, а ΔBCD е равнобедрен правоъгълен с хипотенуза BD, като $BC = \sqrt{2}$.

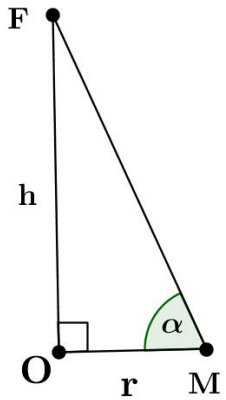
а) (1,5 т.) Докажете, че в основата може да се впише окръжност и намерете радиуса й.

б) (1,5 т.) Дадено е още, че всички околни стени образуват с равнината на основата ъгъл α. Пресметнете обема и околната повърхнина на пирамидата.

в) (2 т.) При условията на точка б), пресметнете радиуса на вписаната в пирамидата сфера. Пресметнете също така разстоянието от върха *A* до околната стена *BCF*.

Решение: а) Както се вижда от следващата рисунка, основата на пирамидата е четириъгълник, който е „сглобен" от равностранен триъгълник Δ_1 със страна 2 и правоъгълен равноберен триъгълник Δ_2 с хипотенуза 2. По условие *AB=AD* и *CB=CD*. Следователно в основата *ABCD* може да се впише окръжност с радиус *r* и център *O*. Сега ще използваме добре известния факт (пише го в справочниците), че ако в многоъгълник с лице *S* и периметър *p* може да се впише окръжност с радиус *r*, то $S=\frac{1}{2}pr$. Но $S=S_{\Delta_1}+S_{\Delta_2}$, където $S_{\Delta_1}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ е лицето на $\triangle ABD$ и $S_{\Delta_2}=\frac{1}{2}.2.1=1$ е лицето на $\triangle BCD$, тоест $S=1+\sqrt{3}$. За периметъра имаме $p=4+2\sqrt{2}$ и значи $1+\sqrt{3}=\frac{1}{2}r\left(4+2\sqrt{2}\right)=\left(2+\sqrt{2}\right).r$. Окончателно $r=\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$. Да обележим, че до тук в Задача 8. няма „стереометрия".

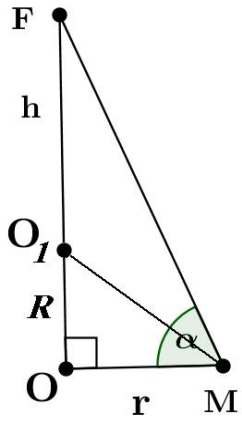




б) Използваме друг добре известен факт (тоест, пише го в таблиците), според който ако някоя фигура с лице Σ лежи в дадена равнина ς, то за лицето S на проекцията на тази фигура в равнина ξ, която сключва двустенен ъгъл α с ς, е изпълнено S=Σ.cosα.. В нашия случай $S=1+\sqrt{3}$, значи за лицето Σ на околната повърхнина на пирамидата имаме $\Sigma=\frac{1+\sqrt{3}}{\cos\alpha}$. Може да пресметнем обема на *ABCDF* след като забележим, че ако вземем апотемата на някоя околна стена, например апотемата FM на $\triangle BCF$, то $\angle OMF$ е линейният ъгъл на двустенния ъгъл при ръба *BC* (защото $OM\perp BC\perp FM$) и значи $\angle OMF=\alpha$. От $\triangle FOM$ се вижда, че за височината *h* на пирамидата имаме *h=r*.tgα. Значи

$V_{ABCDF} = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3}\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{tg}\alpha$; $V_{ABCDF} = \frac{2}{3}\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\mathrm{tg}\alpha$.

в) Нека O_1 е центърът на вписаната сфера. От следващата рисунка се вижда, че дължината на отсечката $OO_1 = R$ може да се пресметне от триъгълника *OMF,* където $\measuredangle O_1MO = \frac{\alpha}{2}$. Значи $R = r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.



Дължината на височината към стената *BCF* на триъгълната пирамида *ABCF* е равна на разстоянието *d* от върха *A* до равнината *BCF*. Тя може да бъде изчислена от зависимостта $V_{ABCF} = \frac{1}{3}d.S_{BCF}$. В нашия случай $V_{ABCF} = \frac{1}{2}V_{ABCDF} = \frac{1}{3}\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\mathrm{tg}\alpha$, а за лицето S_{BCF} имаме $S_{BCF} = \frac{1}{2}BC.FM = \frac{\sqrt{2}}{2}FM = \frac{r\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$ (вижте рисунката в дясно). Значи $d = \frac{3V_{ABCF}}{S_{BCF}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\sin\alpha$.

.