УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

УАСГ

14 ЮНИ 2021 г.

Вариант 2

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1. (1 т.) Корените на уравнението $\log_5(4^x-6)+\log_{\frac{1}{5}}(2^x-2)=1$ са:

а) $x=2$; б) $x_1=1, x_2=4$; в) $x_1=0, x_2=2$; г) $x=\log_2 5$.

Отговор: а).

Задача 2. (1 т.) Корените на уравнението $\sqrt{x-2}=x-5$ са:

а) $\frac{11\pm\sqrt{13}}{2}$; б) $\frac{11+\sqrt{13}}{2}$; в) $\frac{11-\sqrt{13}}{2}$; г) 7,3.

Отговор: б).

Задача 3. (1 т.) Произведението $\log_2 3.\log_3 4.\log_4 5$ е равно на:

а) 2; б) 3; в) $\log_3 5$; г) $\log_2 5$.

Отговор: г).

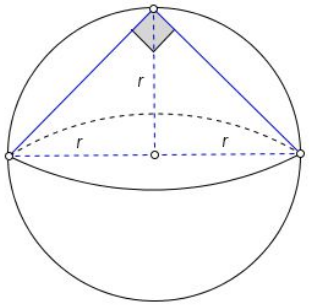
Задача 4. (1 т.) Центърът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ дели ъглополовящата CL в отношение 2:1, считано от върха. Ако дължините на BC и AC са съответно 6 и 8, то дължината на радиуса на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е:

а) 5; б) $\frac{\sqrt{15}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{21}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Отговор: б).

Задача 5. (1 т.) В сфера е вписан прав кръгов конус, ъгълът при върха на осното сечение на който е 90°. Отношението на обема на конуса към обема на кълбото, ограничено от сферата, е:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) друг отговор.



Отговор: в).

ОТГОВОРИТЕ НА ЗАДАЧИ 1 – 5 НАНЕСЕТЕ В ТАБЛИЦАТА:

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
А	**Б**	**Г**	**Б**	**В**

Задача 6. (5 т.) Дадена е функцията

$$f(x)=(a+4)x^2+ax+a+1,$$

където a е параметър.

а) (1,5 т.) За $a=-3$ да се реши уравнението $f(\sqrt{y})=0$.

б) (1,5 т.) За кои стойности на a допирателната към графиката на $f(x)$ в точката с абсциса $x=1$ сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл, равен на 45°?

в) (2 т.) Ако x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $f(x)=0$, за кои стойности на a е изпълнено

$$x_1^2+x_2^2-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\geq\frac{16}{(a+4)^2}?$$

Решение: а) За $a=-3$ получаваме уравнението е $y-3\sqrt{y}-2=0$, което има решение $y=\frac{1}{2}\left(13+3\sqrt{17}\right)$.

б) Тъй като $f'(x)=2(a+4)x+a$ и $f'(1)=\operatorname{tg}45^\circ$, получаваме, че $a=-\frac{7}{3}$.

в) Търсените стойности на a са решение на системата от условия

$$\begin{cases} a+4\neq 0 \\ D\geq 0 \\ x_1\neq 0 \\ x_2\neq 0 \\ {x_1}^2+{x_2}^2-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\geq\frac{16}{(a+4)^2}. \end{cases}$$

Последователно получаваме, че $D\geq 0$ за

$a\in\left[\frac{-10-2\sqrt{13}}{3},-4\right)\cup\left(-4,\frac{-10+2\sqrt{13}}{3}\right]$, $x_{1,2}\neq 0$ при $a\neq -4$ и $a\neq -1$.

Преобразуваме последното неравенство от системата в

$$\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\geq\frac{16}{(a+4)^2}.$$

Използвайки формулите на Виет, получаваме $\frac{a^2+6a+8}{(a+4)^2(a+1)}\leq 0$, откъдето $a\in(-\infty,-4)\cup[-2,-1)$. Окончателно, отговорът е $a\in\left[\frac{-10-2\sqrt{13}}{3},-4\right)\cup[-2,-1)$.

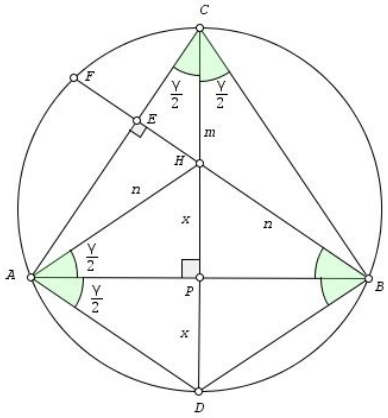
Задача 7. (5 т.) Точка H е ортоцентър на остроъгълния $\triangle ABC$ ($AC=BC$).
а) (1,5т.) Продължението на CH пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка D. Докажете, че правата AB е симетрала на отсечката HD.

б) (1,5т.) Намерете дължината на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, ако $BH=n$ и $CH=m$.

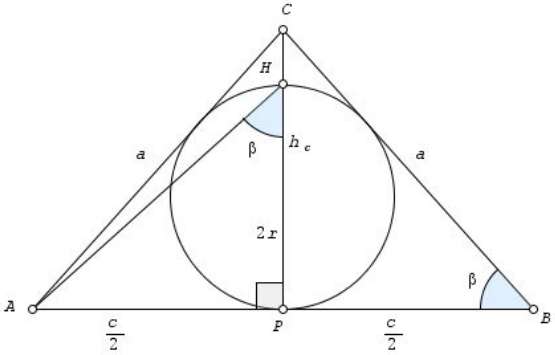
в) (2 т.) Докажете, че $4AC=3AB$, когато H лежи върху вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Решение: Нека $\sphericalangle ACB=\gamma$ (виж черт. 1).

а) $\sphericalangle DAB=\sphericalangle DCB=\frac{\gamma}{2}$ (вписани). $\sphericalangle BAH=90^\circ-\sphericalangle ABC=\frac{\gamma}{2}$. Следователно $\triangle DAP\cong\triangle HAP$, откъдето $DP=PH$ и следва, че AB е симетрала на HD.



Черт.1.



Черт. 2

б) Нека $HP = PD = x$ (от а)). Тогава $2R = 2x + m$, откъдето $x = R - \frac{m}{2}$. От $CP.PD = AP.BP$ имаме $\left(m + R - \frac{m}{2}\right)\left(R - \frac{m}{2}\right) = AP^2$, а от $\triangle AHP$ - $AP^2 = n^2 - \left(R - \frac{m}{2}\right)^2$. Следователно $\left(m + R - \frac{m}{2}\right)\left(R - \frac{m}{2}\right) = n^2 - \left(R - \frac{m}{2}\right)^2$ и тогава $2R^2 - mR - n^2 = 0$. Отговор $R = \frac{1}{4}\left(m + \sqrt{m^2 + 8n^2}\right)$.

в) $\triangle AHP \sim \triangle BCP$ (защо?), откъдето $\frac{2r}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{c}{2}}{h_c}$, т.е. $\frac{4S}{cp} = \frac{c}{2.\frac{2S}{c}}$ (виж черт. 2). След опростяване получаваме $16p(p-a)(p-a)(p-c) = pc^3$. Но $p = a + \frac{c}{2}$ и тогава $4a = 3c$.

Задача 8. (5 т.) Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с дължина на ръба 1.

а) (1,5 т.) Пресметнете обема и пълната повърхнина на пирамидата $A_1DB_1C_1$.

б) (2 т.) Пресметнете ъгъла и разстоянието между кръстосаните диагонали A_1C_1 и DB_1.

в) (1,5 т.) Пресметнете радиуса на описаната около $A_1DB_1C_1$ сфера и радиуса на вписаната в $A_1DB_1C_1$ сфера.

Решение: а) Ако вземем за основа на пирамидата $\triangle A_1B_1C_1$, то нейната височина е DD_1 и обемът е $V = \frac{1}{6}$ (виж черт. 3).

$\triangle DB_1A_1$ и $\triangle DB_1C_1$ са правоъгълни и еднакви, $\triangle A_1B_1C_1$ е правоъгълен, а $\triangle A_1C_1D$ - равностранен. Тогава пълната повърхнина е

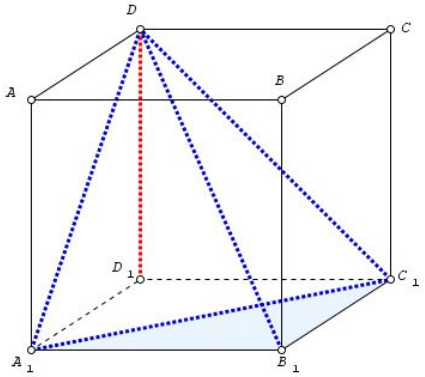
$$S_1 = 2S_{\triangle DB_1C_1} + S_{\triangle A_1B_1C_1} + S_{\triangle A_1C_1D} =$$
$$= 2.\frac{1}{2}.1.\sqrt{2} + \frac{1}{2}.1.1 + \frac{1}{4}(\sqrt{2})^2\sqrt{3} =$$
$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1).$$

б) Тъй като DB_1 се проектира в D_1B_1 в равнината $A_1B_1C_1D_1$ и $A_1C_1 \perp B_1D_1$, по теоремата за трите перпендикуляра, търсения ъгъл е прав.

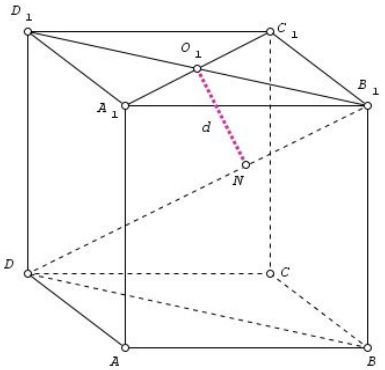
Нека O_1 е пресечната точка на правата A_1C_1 и равнината BB_1D_1D и $O_1N \perp DB_1$, $N \in DB_1$, то $O_1N \perp A_1C_1$ и тогава търсеното разстояние е дължината d на отсечката O_1N. От подобието на $\triangle B_1O_1N$ и $\triangle B_1DD_1$ намираме $d = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (виж черт. 4).

в) За радиуса на вписаната сфера имаме $r = \frac{3V}{S_1} = \frac{1}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}$.

Описаната сфера около пирамидата съвпада с описаната около куба сфера. Следователно $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Черт. 3



Черт. 4