УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
УАСГ

10 ЮНИ 2022 г.

Вариант 1

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1. (1 т.) Числата $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ са такива, че разликите им $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, $b_3 = a_4 - a_3, \ldots$ образуват аритметична прогресия. Ако $a_1 = 7$, $a_2 = 9$ и $a_3 = 12$, то a_6 е:

а) 15; б) 27; в) 19; г) 25.

Отговор: **Б**

Задача 2. (1 т.) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 3x + q = 0$, за които е изпълнено $\lg x_1 + \lg x_2 = 0$, то q е:

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3

Отговор: **Б**

Задача 3. (1 т.) Нека α и β са остри ъгли, за които $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Сумата $\alpha + \beta$ е равна на:

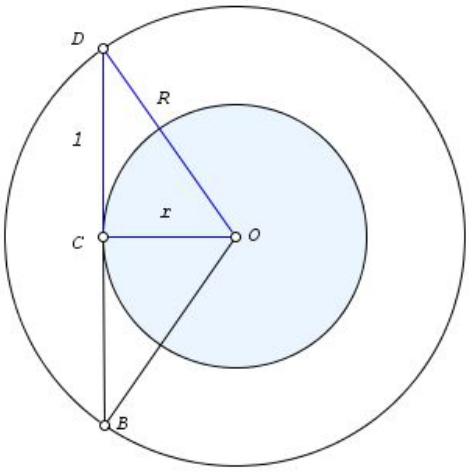
а) 60°; б) 90°; в) 135°; г) 120°.

Отговор: **Б**

Задача 4. (1 т.) Дадени са две различни концентрични окръжности. Прекарана е допирателна към малката окръжност, която е хорда в голямата и е с дължина 2. Лицето на пръстена между двете окръжности е:

а) 1; б) 2; в) π; г) π^2.

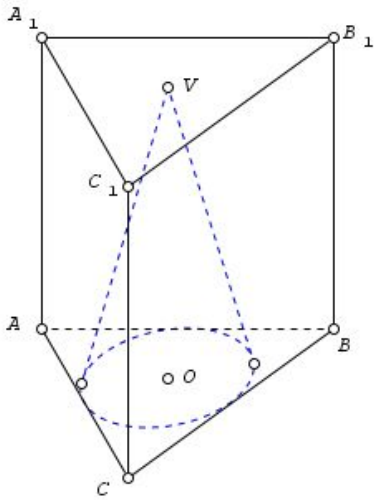
Отговор: **В**



Задача 5. (1 т.) В правилната триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ ($ABC \parallel A_1B_1C_1$) и $AB = A_1B_1 = 1$ е разположен прав кръгов конус. Основата на конуса е вписаният в ABC кръг, а върхът му лежи в равнината $A_1B_1C_1$. Отношението $\frac{V_{призма}}{V_{конус}}$ на обемите на призмата и конуса е равно на:

а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; б) $4,96$; в) $\frac{12}{\pi}$; г) $\frac{9\sqrt{3}}{\pi}$.

Отговор: **Г**



ОТГОВОРИТЕ НА ЗАДАЧИ 1 – 5 НАНЕСЕТЕ В ТАБЛИЦАТА:

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Б	**Б**	**Б**	**В**	**Г**

Задача 6. (5 т.) Дадено е уравнението

$$(a+1).\log_2^2 x-(a+5).\log_2 x+4=0,$$

където a е параметър.

а) (1 т.) Да се определи a, ако $x=2^{2022}$ е решение на уравнението.

б) (2 т.) Да се реши уравнението за $a=-3$.

в) (2 т.) Да се определи a така, че корените на уравнението да са в интервала $\left(\frac{1}{2},4\right)$.

Решение: След полагането $\log_2 x=y$ за $x>0$ получаваме уравнението

$$(a+1)y^2-(a+5)y+4=0,$$

което има решения $y_1=1$ и $y_2=\frac{4}{a+1}$ при $a\neq -1$. При $a=-1$ уравнението има корен $y=1$.

а) Ако $x=2^{2022}$, то $a=-\frac{1009}{1011}$.

б) За $a=-3$ получаваме $x_1=2, x_2=\frac{1}{4}$.

в) За $a=-1$ получаваме $x=2$, което принадлежи на интервала $\left(\frac{1}{2},4\right)$.

За $a\neq -1$ даденото условие е еквивалентно на условието корените на квадратното уравнение да са в интервала $(-1,2)$. То е изпълнено за $a\in(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$.

Задача 7. (5 т.) Ъгълът при основата на равнобедрен триъгълник е α.

а) (3 т.) Да се изрази като функция на α отношението на радиусите на вписаната и описаната окръжности. Да се пресметне това отношение за $\alpha=30^\circ$.

б) (2 т.) За кои стойности на α отношението е най-голямо?

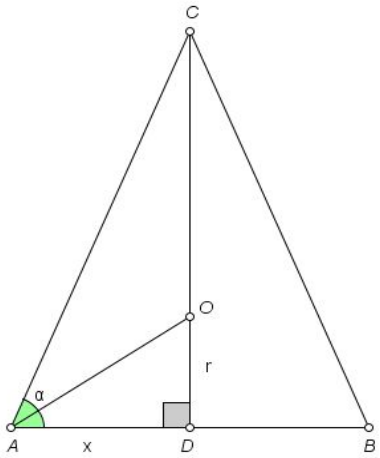
Решение: Нека $AC=BC$ и AO е ъглополовящата на α (черт.1). Да означим $AD=x$ и $DO=r$, където D е петата на височината през върха C.

а) Получаваме $r=x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а от синусова теорема имаме $R=\frac{x}{\sin 2\alpha}$. Тогава $\frac{r}{R}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha$.

При $\alpha=30^\circ$ получаваме $\frac{r}{R}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$.

б) Тъй като $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $0<\cos\alpha<1$ и от $\frac{r}{R}=2\cos\alpha(1-\cos\alpha)=\frac{1}{2}-2\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{2}$

получаваме $\alpha=\frac{\pi}{3}$.



черт. 1

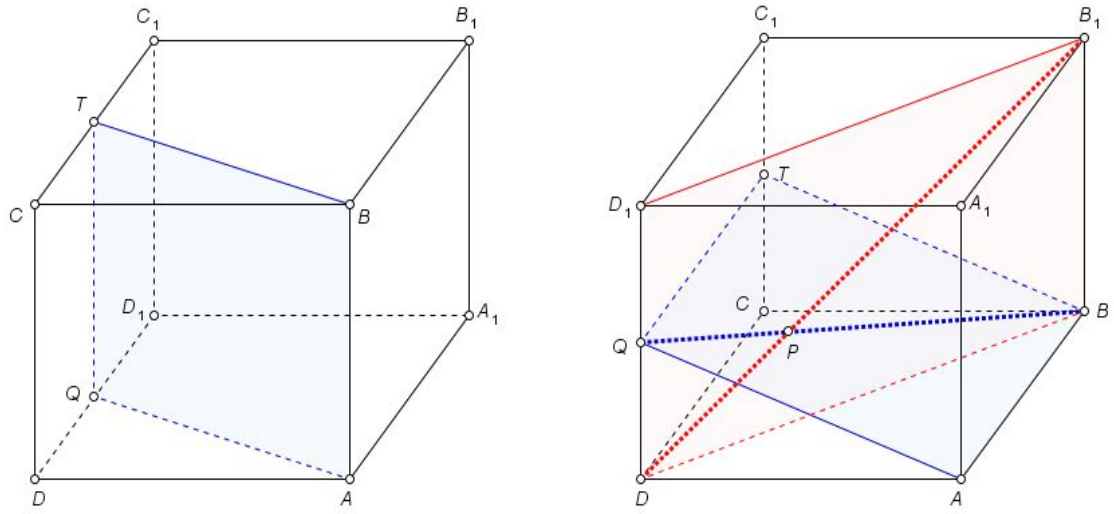
Задача 8. (5 т.) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е куб с дължина на ръб 1. Равнина α минава през A, B и средите T и Q на CC_1 и D_1D съответно.

а) (3т.) Намерете отношението на обемите на частите, на които α дели куба.

б) (2т.) В какво отношение α дели B_1D.

Решение: а) Очевидно равнината α отсича от куба призмата $ADQBCT$ (черт. 2). Тогава $\frac{V_{ADQBCT}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{ADQ}}{S_{AA_1D_1D}} = \frac{1}{4}$. Следователно търсеното отношение е 1:3.

б) Нека $BQ \cap B_1D = P$ и от подобието $\triangle BB_1P \sim \triangle QDP$ следва, че $\frac{B_1P}{DP} = \frac{2}{1}$.



черт. 2
