УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

УАСГ

9 ЮНИ 2023 г.

Вариант 1

Примерни решения

Задача 1. (1 т.) Числото $2\sqrt[4]{\left(\sqrt{17}-5\right)^4}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{17}-5\right)^3}$ е равно на:

а) $3\left(\sqrt{17}-5\right)$; б) $3\left(5-\sqrt{17}\right)$; в) $5-\sqrt{17}$; г) $\sqrt{17}-5$.

Упътване: $\sqrt[4]{a^4}=|a|$.

Отговор: в)

Задача 2. (1 т.) Ако $\log_a b=23$, то $\log_{\frac{b}{a}} a^{10}b$ е равно на:

а) -10; б) 10; в) $-\frac{3}{2}$; г) $\frac{3}{2}$

Упътване: $\log_a b=23\Rightarrow b=a^{23}$.

Отговор: г)

Задача 3. (1 т.) Ако $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$ и $\alpha\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$, то стойността на израза $\sin\alpha+\cos\alpha$ е:

а) $\frac{17}{13}$; б) $-\frac{17}{13}$; в) $-\frac{13}{17}$; г) $\frac{13}{17}$.

Упътване: $12\sin\alpha=5\cos\alpha$.

Отговор: б)

Задача 4. (1 т.) В ромб е вписан кръг с радиус r. Големият диагонал на ромба е с дължина $4r$. Лицето на частта от ромба, вън от кръга е:

а) $\left(\frac{8}{\sqrt{3}}-\pi\right)r^2$; б) $\left(\sqrt{3}-\pi\right)r^2$; в) $\left(\frac{8}{3}-2\pi\right)r^2$; г) $\left(\frac{8}{\sqrt{3}}+\pi\right)r^2$.

Упътване: Острият ъгъл на ромба е 60°.

Отговор: а)

Задача 5. (1 т.) В правилна четириъгълна призма с височина 15 и пълна повърхнина 432 е вписан прав кръгов цилиндър. Обемът на цилиндъра е:

а) 225π; б) 28.8π; в) 135π; г) 540π.

Упътване: Основният ръб на призмата е 6.

Отговор: в)

ОТГОВОРИТЕ НА ЗАДАЧИ 1 – 5 НАНЕСЕТЕ В ТАБЛИЦАТА:

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
В	Г	Б	А	В

Задача 6. (5 т.) Дадено е уравнението

$$a\left(4^x-2^{x+2}\right)=a-5,$$

където a е параметър.

а) (1 т.) Да се определи a, така че $x=4\sin\frac{\pi}{6}$ да е корен на уравнението.

б) (2 т.) За кои стойности на a числото 1 е между корените на уравнението?

в) (2 т.) За кои стойности на a за корените x_1 и x_2 на уравнението е изпълнено $x_1+x_2=\log_2(a-1)$?

Решение: а) $x=2$, $a=5$.

б) От полагането $2^x=y, y>0$ получаваме уравнението

$$ay^2-4ay-a+5=0. \qquad (1.1)$$

Очевидно $a\neq 0$. За да е изпълнено условието $x_1<1<x_2$, трябва за корените y_1 и y_2 на полученото квадратно уравнение (1.1) да е изпълнено $0<y_1<2<y_2$, което е еквивалентно на системата $\begin{vmatrix} a(5-a)>0 \\ a(1-a)<0 \end{vmatrix}$. Следователно $a\in(1,5)$.

в) При означенията в б), трябва да бъдат изпълнени условията: $y_1, y_2>0$,

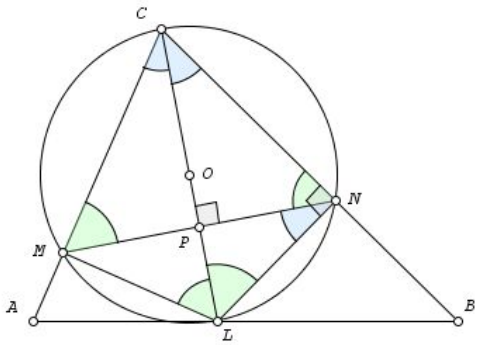
$\frac{5-a}{a} = y_1 y_2 = a-1$ и $a-1>0$. Оттук $a=\sqrt{5}$.

Задача 7. (5 т.) Окръжност k с диаметър ъглополовящата CL на остроъгълния $\triangle ABC$ пресича страните AC и BC съответно в точки M и N.
а) (2 т.) Пресметнете ъгъла между MN и CL.
б) (1,5 т.) Пресметнете дължината на окръжността с център L и минаваща през точките M и N, ако $AC=13$, $BC=14$ и $AB=15$.
в) (1,5 т.) Докажете, че $MN \geq \frac{S}{R}$, където R и S са съответно радиуса на описаната окръжност и лицето на $\triangle ABC$.

Решение: а) $\sphericalangle MPL = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{ML}+\overset{\frown}{NC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{LN}+\overset{\frown}{NC}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{LNC} = 90^\circ$.

б) Очевидно $\sphericalangle CNL = \sphericalangle CML = 90^\circ$. От $\triangle CNL \cong \triangle CML$ (защо?) следва, че $LN = LM$. Тогава дължината на окръжността е $2\pi LN$. От $S_{\triangle BLC} + S_{\triangle ALC} = S_{\triangle ABC}$ следва, че $LN.BC + LM.AC = 2S_{\triangle ABC}$, откъдето $LN = LM = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC+BC} = \frac{2.84}{27} = \frac{56}{9}$. Отговор $\frac{112}{9}\pi$.

в) От синусова теорема за $\triangle MCN$ имаме $MN = CL\sin\sphericalangle ACB \geq h_c.\frac{c}{2R} = \frac{S}{R}$, където h_c е височината през върха C за $\triangle ACB$.



Черт. 1

Задача 8. (5 т.) Основата на четириъгълна пирамида $ABCDV$ е правоъгълник $ABCD$ $(AB>BC)$ с диагонал $2\sqrt{3}$ и ъгъл между диагоналите 60°. Всички околни ръбове сключват с основата равни ъгли с големина α.

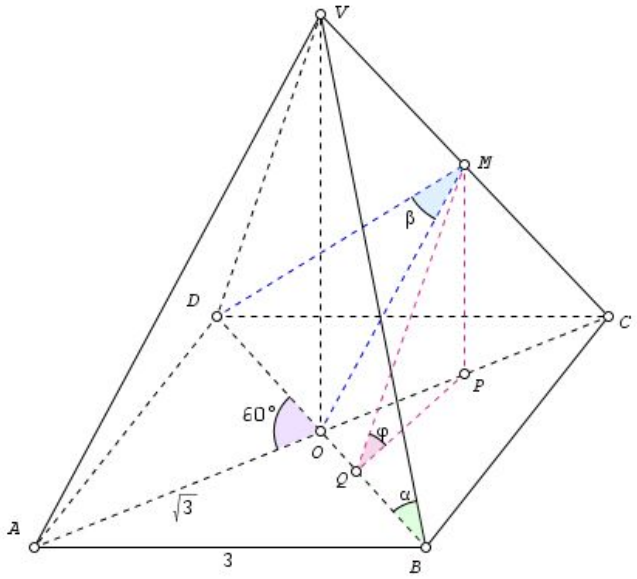
а) (1,5 т.) Пресметнете обема на пирамидата.
б) (2 т.) Пресметнете косинуса на ъгъла между AV и DM, където точка M е среда на ръба CV, ако $\alpha = 45^\circ$.
в) (1,5 т.) Пресметнете тангенса на ъгъла между равнините (BDM) и (ABC).

Решение: а) От $\triangle AOD$ равностранен (виж черт. 2) следва, че $AD=\sqrt{3}$. Тогава по Питагорова теорема за $\triangle ABD$ имаме $AB=3$. От това, че околните ръбове сключват ъгъл α с основата следва, че VO е височина на пирамидата. Оттук

$VO=OB\text{tg}\alpha=\sqrt{3}\text{tg}\alpha$ и $V_{ABCDV}=\frac{1}{3}AB.AD.VO=3\text{tg}\alpha$.

б) Средната отсечка MO в $\triangle AVC$ е успоредна на AV. Тогава търсеният ъгъл е $\sphericalangle DMO$. От правоъгълния $\triangle AVC$ намираме $AV=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$, откъдето $MO=\frac{\sqrt{6}}{2}$. За медианата DM на $\triangle CDV$ имаме $DM=\frac{1}{2}\sqrt{2AV^2+2CD^2-CV^2}=\sqrt{6}$. Търсеният косинус намираме от $\triangle DMO$ - $DO^2=DM^2+MO^2-2DM.MO\cos\beta$. Отговор $\cos\beta=\frac{3}{4}$.

в) Построяваме $MP\perp(ABC)$ и $PQ\perp BD$. Тогава търсения ъгъл е $\sphericalangle MQP=\varphi$. От $\triangle PQM$ имаме $\text{tg}\varphi=\frac{MP}{PQ}=\frac{\frac{VO}{2}}{\frac{CO}{2}\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{tg}\alpha$.



Черт. 2