УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
УАСГ
7 ЮНИ 2024 г.

Вариант 1

Примерни решения

Задача 1. (1 т.) Броят на целите числа, които са решения на неравенството $(x^2-4)(x-2)(x-5)<0$, е:

а) 6; б) 5; в) 4; г) 3; д) друг отговор.

Задача 2. (1 т.) Разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=-2x^2-x-1$ в интервала $[-1,2]$ е:

а) -3; б) 2; в) $\frac{81}{8}$; г) $-\frac{95}{8}$; д) друг отговор.

Задача 3. (1 т.) Множеството от решенията на неравенството $5^x+2.3^{x-2}>2.5^{x-1}+3^{x+1}$ е:

а) $(-\infty,0)$; б) $(1,\infty)$; в) $(-\infty,3)$; г) $(3,\infty)$; д) друг отговор.

Задача 4. (1 т.) Трапецът $ABCD$ е вписан в окръжност с център върху голямата основа AB. Проекцията на бедрото AD върху AB има дължина 9 см. Ако дължината на диагонала AC е 20 см, то дължината на CD е:

а) 8 см; б) 7 см; в) 5.5 см; г) 6 см; д) друг отговор.

Задача 5. (1 т.) Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с дължина на ръб 4 см. Сфера $s(O;R)$ минава през A, B, C и D и се допира до $(A_1B_1C_1D_1)$. Ако O е вътре в куба, то дължината на R е:

а) 1 см б) 2 см; в) 1.5 см; г) 0.5 см; д) друг отговор.

ОТГОВОРИТЕ НА ЗАДАЧИ 1 – 5 НАНЕСЕТЕ В ТАБЛИЦАТА:

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Б	В	Г	Б	Д

Задача 6. (5 т.) Дадени са функциите

$$f(x)=\sqrt{169-x^2} \text{ и } g(x)=x-a,$$

където a е параметър.
а) (1 т.) Да се определят пресечните точки на графиките на двете функции при $a=7$.
б) (2 т.) Да се намерят стойностите на x, за които графиката на функцията $f(x)$ е под графиката на функцията $g(x)$, ако $a=7$.
в) (2 т.) За кои стойности на a уравнението $f(x).g(x)=0$ има точно две решения.

Решение: а) Абсцисите на пресечните точки на графиките на двете функции удовлетворяват уравнението $\sqrt{169-x^2}=x-7$. То е еквивалентно на $\begin{vmatrix} 169-x^2=(x-7)^2 \\ x-7\geq 0 \end{vmatrix}$, откъдето $x=12$. Следователно графиките имат една пресечна точка с координати $(12,5)$.

б) От условието следва, че $\sqrt{169-x^2}<x-7$, което е еквивалентно на $\begin{vmatrix} 169-x^2\geq 0 \\ x-7>0 \\ 169-x^2<(x-7)^2 \end{vmatrix}$.

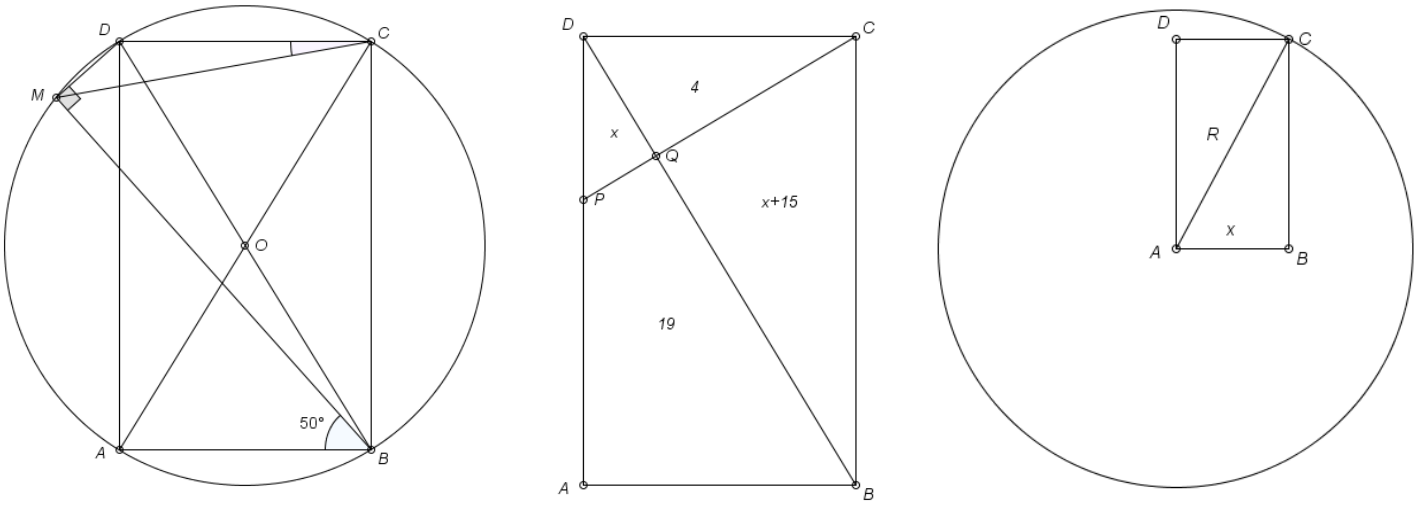
Решението на тази система е $x\in(12,13]$.

в) Очевидно, че числата 13 и -13 са решения на уравнението $\sqrt{169-x^2}(x-a)=0$. От тук следва, че a не трябва е корен на уравнението и тогава $169-a^2<0$, откъдето $a\in(-\infty,-13)\cup(13,+\infty)$.

Задача 7. (5 т.) Даден е правоъгълник $ABCD$ с $BC\geq AB$.
а) (1.5 т.) Точка M е такава, че $\sphericalangle BMD$ е прав и $\sphericalangle ABM=50^\circ$. Намерете $\sphericalangle MCD$, ако ъгълът между AC и BD е 60°.
б) (2 т.) Права, минаваща през точка C и перпендикулярна на BD, пресича AD и BD съответно в точки P и Q. Лицето на $\triangle CQD$ е 4 см^2, а лицето на четириъгълника $ABQP$ е 19 см^2. Намерете лицето на четириъгълника $ABCD$.
в) (1.5 т.) Докажете, че отношението на лицето на кръга с център A и радиус AC и лицето на правоъгълника $ABCD$ е не по-малко от 2π.

Решение: а) Точка M лежи на дъгата AD от описаната около $ABCD$ окръжност. Тогава $\sphericalangle MCD=\sphericalangle MBD=60^\circ-50^\circ=10^\circ$ (черт. 1, а)).

б) Нека $S_{PQD}=x$ (черт. 1, б)). От $\triangle PQD\sim\triangle DQC$ следва, че $\frac{x}{4}=\frac{DP^2}{DC^2}$. От $\triangle DCQ\sim\triangle QCB$ следва, че $\frac{4}{x+15}=\frac{DC^2}{BC^2}$. От $\triangle PDC\sim\triangle BDC$ следва, че $\frac{DP}{DC}=\frac{DC}{BC}$. Тогава $\frac{x}{4}=\frac{4}{x+15}$, откъдето $x=1$. Оттук търсеното лице е 40 см^2.
в) Нека R е радиуса на окръжността и $AB=y$ (черт. 1, в)). Тогава търсеното отношение е $k=\frac{\pi R^2}{y\sqrt{R^2-y^2}}$. От известното неравенство $ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$, приложено за y и за $\sqrt{R^2-y^2}$ получаваме $k\geq\pi R^2\frac{2}{y^2+R^2-y^2}=2\pi$.



а) б) в)

Черт. 1

Задача 8. (5 т.) Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа квадрат $ABCD$ и околни ръбове $BM=\sqrt{2}$ и $AM=1$. Околният ръб AM е перпендикулярен на равнината на основата.

а) (1,5 т.) Намерете лицето на околната повърхнина на пирамидата.

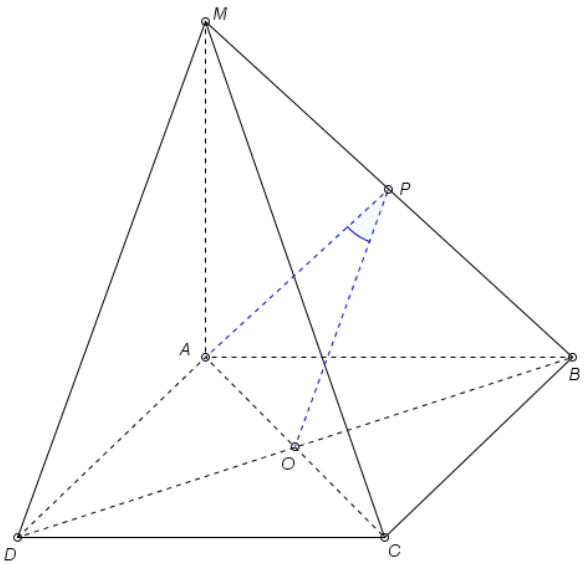
б) (2 т.) Намерете ъгъла между правите DM и AP, където AP е медиана в $\triangle ABM$.

в) (1,5 т.) Намерете разстоянието от точка A до равнината BDM.

Решение: а) От $\triangle ABM$ намираме, че основния ръб е 1 (черт. 2). Тогава $DM=AC=\sqrt{2}$ и $CM=\sqrt{3}$. Следва, че всички околни стени са правоъгълни триъгълници. Тогава лицето на околната повърхнина е $1+\sqrt{2}$.

б) Търсеният ъгъл е $\sphericalangle APO$, където PO е средната отсечка в $\triangle BDM$. Очевидно $\triangle APO$ е равностранен.

в) Търсеното разстояние е височината през върха A в триъгълната пирамида $ABDM$, която има обем $\frac{1}{6}$ и лице на основата $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отговор $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Черт. 2
