УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
УАСГ
6 ЮНИ 2025 г.

Вариант 1

Примерни решения

Задача 1. (1 т.) За аритметична прогресия е известно, че $a_{14}=31$ и $a_5=6.7$. Тогава броят на членовете, по-малки от 50, е:

а) 20; б) 21; в) 22 ; г) 33; д) друг отговор.

Отговор: б)

Задача 2. (1 т.) Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\lg(-x-1)$ е:

а) $x<1$; б) $x<-1$; в) $x\in(-1,1)$; г) $x>1$; д) друг отговор.

Отговор: б)

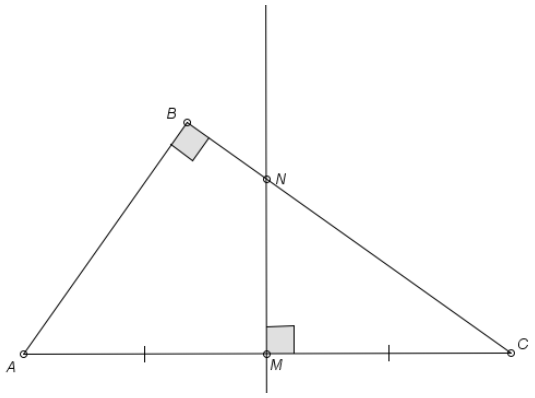
Задача 3. (1 т.) Стойността на израза $\frac{1-2\cos^2 13^\circ}{\sin 64^\circ}$ е:

а) 1; б) 0; в) -1; г) $\frac{1}{2}$; д) друг отговор.

Отговор: в)

Задача 4. (1 т.) Симетралата на хипотенузата AC на правоъгълния триъгълник ABC пресича страните BC и AC съответно в точки M и N. Известно е, че $MN=1$ и $BC=3$. Тогава дължината на AB е равна на:

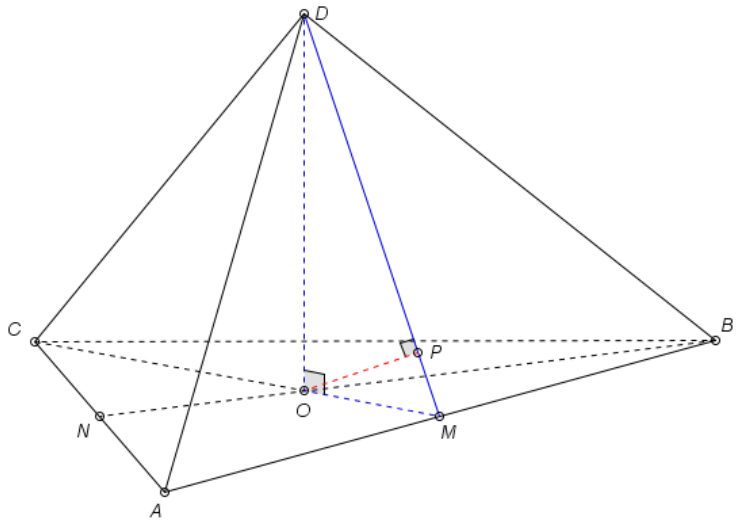
а) 2; б) 3; в) $2\sqrt{3}$; г) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; д) друг отговор.



Отговор: д). От подобието на $\triangle CMN$ и $\triangle CBA$ следва, че $AB=\sqrt{3}$.

Задача 5. (1 т.) Дадена е правилна триъгълна пирамида $ABCD$, на която всички ръбове са равни на a. Разстоянието от центъра на основата ABC до околна стена е:

а) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; г) $\frac{a\sqrt{6}}{9}$; д) друг отговор.



Отговор: г) Търсеното разстояние е $OP = \frac{OM.DO}{DM} = \frac{a\sqrt{6}}{9}$.

ОТГОВОРИТЕ НА ЗАДАЧИ 1 – 5 НАНЕСЕТЕ В ТАБЛИЦАТА:

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Б	Б	В	Д	Г

Задача 6. (5 т.) Дадена е функцията

$$f(x) = (a-1)x^4 - 2(a+1)x^2 + a - 3$$

където a е параметър.

а) (1 т.) Да се реши уравнението $f(x) = 0$ при $a = \frac{19}{3}$.

б) (2 т.) Да се намерят стойностите на a, за които уравнението $f(x) = 0$ има точно две решения.

в) (2 т.) За кои стойности на a неравенството $f(x) > 0$ няма решение?

Решение: а) При $a=\frac{19}{3}$ получаваме уравнението $8x^4-22x^2+5=0$, което има решения $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$.

б) От полагането $x^2=y$, $y\geq 0$ получаваме уравнението

$$(a-1)y^2-2(a+1)y+a-3=0.$$

Разглеждаме следните случаи:

1. $a=1$ и $y>0\Rightarrow a\in\varnothing$;
2. $a\neq 1$, $D=0$, $y>0\Rightarrow a\in\varnothing$;
3. $a\neq 1$, $D>0$, $y_1y_2<0\Rightarrow a\in(1,3)$.

Следователно решението е $a\in(1,3)$.

в) За $a=1$ $f(x)=-4x^2-2<0$ за всяко x.

Очевидно ако $a>1$ $f(x)>0$ има решение.

Нека $a<1$. Полагаме във $f(x)$ $x^2=y$, и получаваме

$$f(x)=g(y)=(a-1)y^2-2(a+1)y+a-3.$$

За да няма решение неравенството $g(y)>0$, имаме две възможности:

1) $D\leq 0$

или

2) $D>0$ и корените на $g(y)=0$ са отрицателни.

От 1) имаме $a\leq\frac{1}{3}$, а от 2) получаваме $\frac{1}{3}<a<1$. Окончателно $a<1$.

Отговор $a\leq 1$.

Задача 7. (5 т.) За вписания в окръжност четириъгълник $ABCD$ е известно, че $\sphericalangle BAD=60^\circ$, $\sphericalangle CDA=90^\circ$, $CD=m$ и $BC=n$.

а) (2 т.) Намерете дължината на BD и докажете, че радиусът на окръжността е равен на $\sqrt{\frac{m^2+n^2+mn}{3}}$.

б) (1.5 т.) Намерете синуса на ъгъла между диагоналите на четириъгълника, ако $m=4$ и $n=3$.

в) (1.5 т.) Нека $m=n$. Докажете, че в $ABCD$ може да се впише окръжност и намерете нейния радиус.

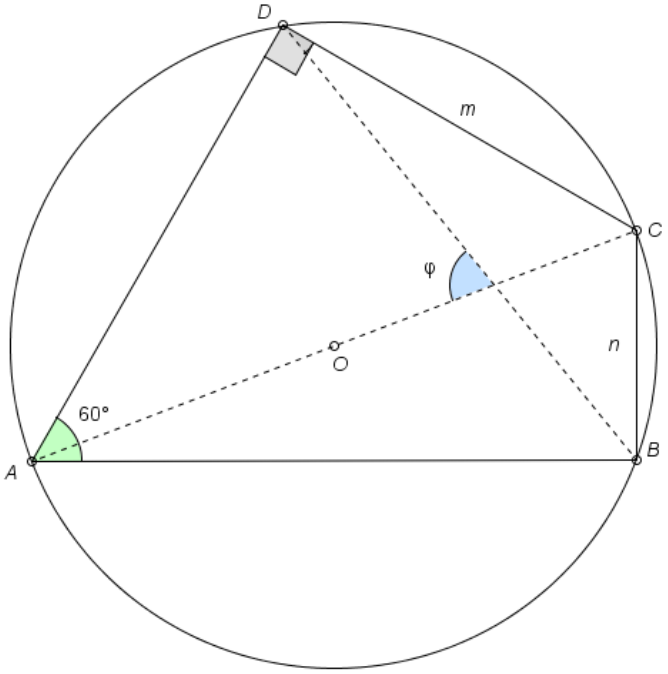
Решение: а) От косинусова теорема за $\triangle BCD$ получаваме, че $BD=\sqrt{m^2+n^2+mn}$. Тогава търсеният радиус е равен на $\frac{BD}{2\sin 120^\circ}$.

б) При $m=4$ и $n=3$ лицето на четириъгълника е

$\frac{1}{2}AC.BD\sin\varphi=S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}AB.BC+\frac{1}{2}AD.DC$, откъдето

$\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{37}{3}}.\sqrt{37}\sin\varphi=\frac{73}{2\sqrt{3}}$. Отговор $\sin\varphi=\frac{73}{74}$.

в) От $BC = CD = m$ получаваме $AB = AD = m\sqrt{3}$ и следователно в четириъгълника $ABCD$ може да се впише окръжност. За радиуса на вписаната окръжност получаваме $r = \frac{S}{p} = \frac{m^2\sqrt{3}}{m\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{m\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.



Черт. 1

Задача 8. (5 т.) Основата ABC на триъгълна пирамида $ABCD$ е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB, в който $AC = 6$ и $BC = 8$.
а) (1,5 т.) Да се намери обемът на пирамидата, ако всички околни ръбове са равни на 15.
б) (2 т.) Да се намери повърхнината на пирамидата, ако стената DAB е перпендикулярна на основата, а другите две околни стени сключват ъгли 45° с равнината на основата на пирамидата.
в) (1,5 т.) Да се намери косинусът на ъгъла и разстоянието между правите BC и AD, ако всички околни ръбове сключват ъгъл 30° с равнината на основата.

Решение: а) Тъй като всички околни ръбове на пирамидата са равни, то нейният връх се проектира в центъра O (виж черт. 2) на описаната около основата окръжност. Тогава за височината DO на пирамидата получаваме $DO = 10\sqrt{2}$ и $V_{ABCD} = 80\sqrt{2}$.

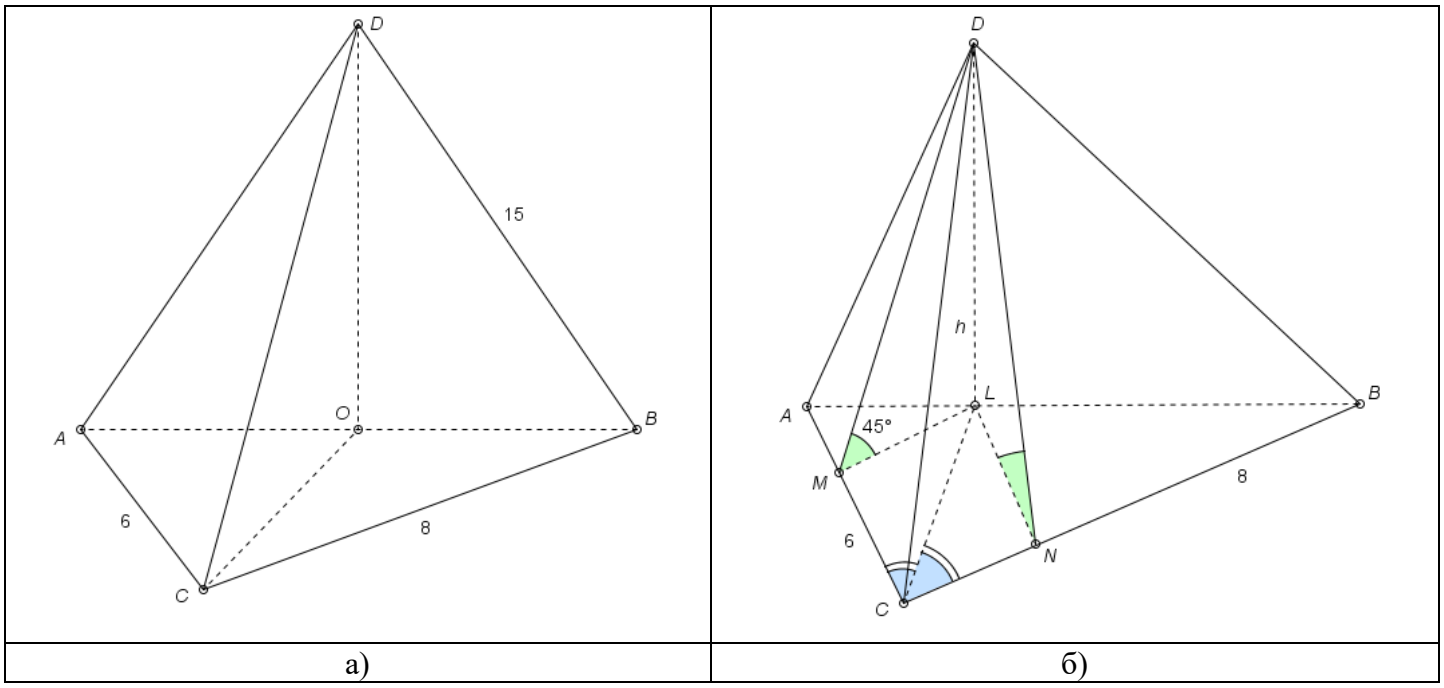
б) Нека $DM \perp AC$ и $DN \perp BC$, откъдето $ML = NL$ и ъглополовящата $CL = \frac{24\sqrt{2}}{7}$ (виж черт. 2 б).

Тогава $DL = ML = \frac{CL\sqrt{2}}{2} = \frac{24\sqrt{2}}{7}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{24}{7}$. За повърхнината на пирамидата получаваме $S_1 = \frac{24}{7}\left(7\sqrt{2}+12\right)$ (защо?).

в) От условието непосредствено следва, че всички ръбове на пирамидата са равни. Тогава върхът D се проектира в средата O на AB. От ADO получаваме $AD = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Допълваме

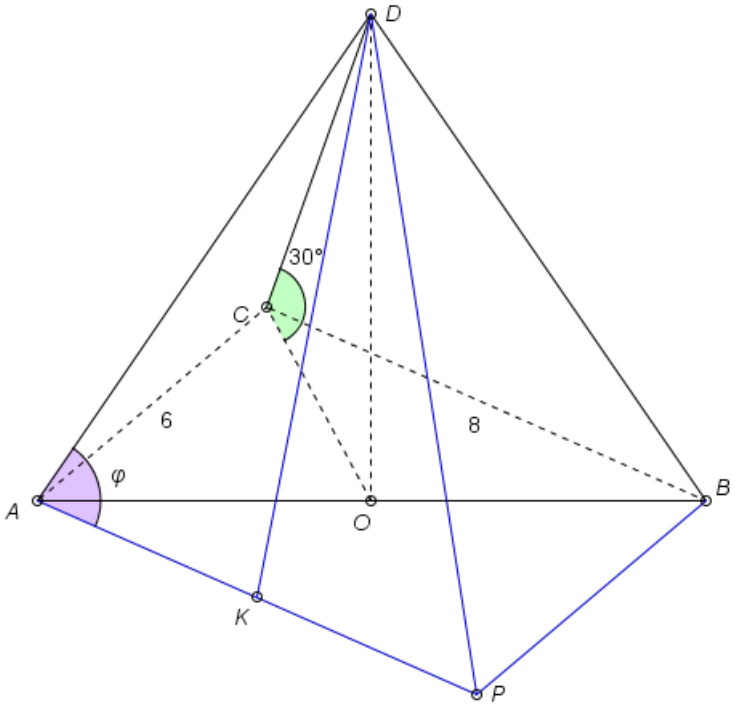
ABC до успоредник $ACBP$ (виж черт. 3). Тогава търсеният ъгъл е $\sphericalangle DAP = \varphi$. От косинусова теорема за $\triangle APD$ получаваме $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Разстоянието между правите е равно на височината през върха B в триъгълната пирамида $ABPD$ (Защо?). Остава да отбележим, че $S_{APD} = \frac{1}{2}.8.\sqrt{\frac{100}{3} - 16}$. Тогава $\frac{1}{3}S_{APD}.h_B = V_{ABPD} = V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}.DO = \frac{1}{3}.24.\frac{5\sqrt{3}}{3}$. Отговор $h_B = \frac{15\sqrt{13}}{13}$.



а) б)

Черт. 2



Черт. 3